球面天文学

夏一飞　黄天衣　编著

南京大学出版社

1995·南京



(苏)新登字011号

内 容 简 介

本书是根据编著者在南京大学天文系讲授球面天文学课程的讲义编写而成。全书共分为八章，内容包括天球坐标系和时间系统，地心坐标，日心或太阳系质心坐标，岁差、章动和极移，恒星的运动，恒星位置的计算，相对论初步和相对论效应。

本书可作为高等院校天文专业学生的教材，亦可供天文、地学、空间科学等领域的科技人员参考。

球 面 天 文 学
夏一飞 黄天衣 编著
*
南京大学出版社出版
（南京大学校内 邮政编码 210093）
江苏省新华书店发行 江苏省扬中市印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/16 印张：12.875 字数：318千
1995年5月第1版 1995年5月第1次印刷
印数 1—500
ISBN 7-305-02667-0/P·102
定价：15.00元

前　言

80年代初苗永宽教授主持下编写的《球面天文学》（1983年科学出版社出版）曾在南京大学天文学系作为基础课教材沿用多年。

相隔10余年后，有两个理由促使我们重新编写一本新的球面天文学教科书。一是矢量和矩阵已逐步取代球面三角成为主要的数学工具，以适应电子计算机的应用。另一个更实质和更重要的是近年来天体测量新技术的迅速发展。射电干涉测量、激光测距、空间天体测量等新技术已使观测精度比经典技术提高了1个量级，这迫使球面天文学的理论和方法有了新的发展，并开始引入广义相对论效应。

本书是根据我们在南京大学天文学系多年讲授球面天文学的教学实践的基础上，并结合我们近年来关于天文参考系的科学研究工作而编写的。全书可分为两部分。第一章至第六章为第一部分，讲授经典的球面天文学。对每个论题都详尽地给出近似的球面公式和严格的矢量计算公式。第七章至第八章为第二部分，讲授相对论框架里的球面天文学，着重在概念和基本方法，具体的公式仅限于施瓦西时空的结果。经典的内容仍是最基本和最重要的，有关相对论的这一领域还在发展之中，书中只给出比较成熟且已见诸应用的内容。

阅读本书之前，读者应具备数学分析、矩阵运算和天体力学的知识，但并不要求修读过狭义和广义相对论，第七章中介绍了本书需要的相对论知识。

本书的第一至第六章由夏一飞编写，第七、八两章由黄天衣编写。全书由夏一飞通校。

张承志教授对本书的章节划分和内容的安排提出宝贵的意见。陆埮教授审阅了第七章的部分章节。在此一并致谢。

由于我们水平有限，加上学科本身发展迅速，书中错漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

夏一飞　黄天衣

1993年2月于南京大学

时、坐 [illegible] 系 标

2 2 合并一起

恒星、太阳 [illegible] UTC 世界时、[illegible]

地心坐标、大气折射、周日视差、周日光行差.

地心坐 <-> 日心坐

地球参考系 <-> 天球 [illegible]、章 [illegible]、地球自转

位置.

目 录

空间测量基础

第一章　天球坐标系和时间系统

VLBI

第一节　基本公式

甚长基线测量
遥感(Remote sensor)
重力卫星 Grace satellite

一、球面坐标和直角坐标

在记录天体位置的坐标系中，一点的位置和它的坐标之间的关系必须具有唯一的可逆关系，即一点只能用一组坐标值来唯一表征，而一组坐标也只定义一点的位置。球面坐标系和直角坐标系都具备这一特性。

天球看作单位球。如图 1.1，在天球上按一定的原则选取某一点作为极，称为第一极，与第一极正相对的一点称为第二极；同这两个极的连线垂直的大圆称为基本圈；在基本圈上任意地或按照惯例选取一点作为零点；经过零点和两极的大圆为零经圈；由第一极和零经圈可建立球面坐标系。这样天体在天球上的位置就可用球面坐标经角μ和纬角ν来确定。纬角ν是天体σ与天球中心O的连线同基本圈平面的夹角。若零经圈绕通过两极的轴线正向旋转，当它同天体的经圈（通过两极和天体的大圆）相重合时所转角度称为经角μ。纬角ν有时也可用它的余纬角$\eta=90^\circ-\nu$来代替。

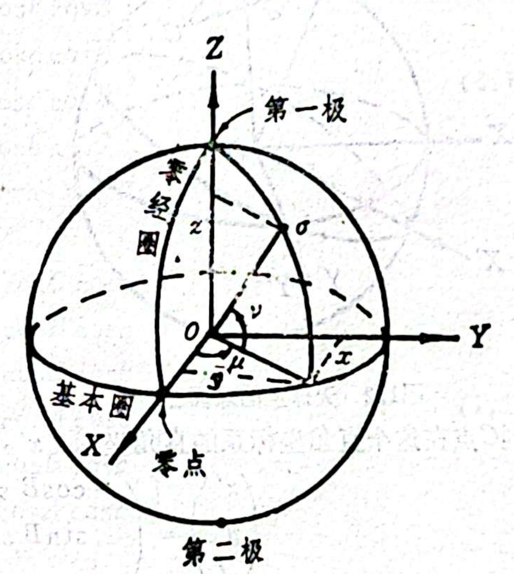


图1.1　球面坐标和直角坐标

相应的直角坐标系通常是这样定义的：Z轴指向第一极，X轴指向零经圈和基本圈的交点，Y轴在基本圈平面上，它是X轴绕Z轴旋转$+90^\circ$所到达的位置，旋转方向按球面坐标系经角增加的方向为正。

由图1.1可以看出天体σ的球面坐标(μ，ν)和直角坐标(x,y,z)有如下关系

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu\cos\nu \\ \sin\mu\cos\nu \\ \sin\nu \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \tan^{-1}(y/x) \\ \nu &= \tan^{-1}\left(z/\sqrt{x^2+y^2}\right)=\sin^{-1}z \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

规定：$0^\circ\leqslant\mu\leqslant360^\circ$，$|\nu|\leqslant90^\circ$（相应地$0^\circ\leqslant\eta\leqslant180^\circ$），则可保证球面坐标和直角坐标之间的关系是唯一可逆的。

x，y、z为天体σ在$O\text{-}XYZ$坐标系中的方向余弦，因此天体方向的单位矢量可写为

$$\vec{S}(\mu,\nu)=\begin{pmatrix}\cos\mu\cos\nu\\ \sin\mu\cos\nu\\ \sin\nu\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

天球中心或直角坐标系的原点通常取为地心，日心或太阳系质心，有时也取在观测处。球面天文学的任何问题都可用球面三角学或三维矢量方法处理。

二、球面三角形的基本公式

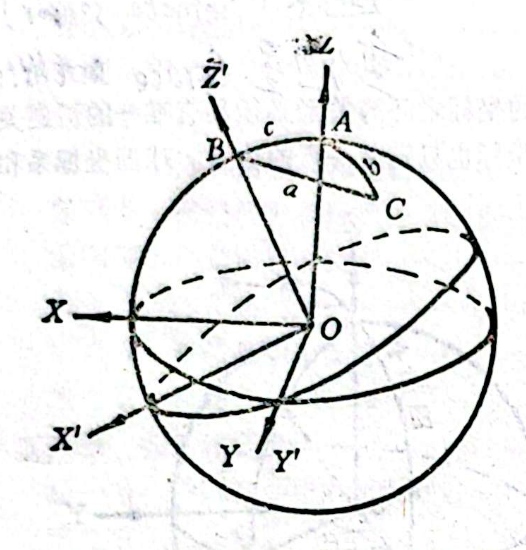


图1.2　天球上的球面三角形

考虑图1.2中以O点为中心的天球及其上的球面三角形ABC，以a,b,c表示边及其长，A，B，C表示角及其值。设A点为极，通过A和B点的大圆为零经圈，$O\text{-}XYZ$为相应的直角坐标系，则C点的球面坐标为（A，$90°-b$）。根据（1.1）式，可得C点的直角坐标（x，y，z）为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos A\sin b\\ \sin A\sin b\\ \cos b\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

现设B点为极，得到另一个直角坐标系$O\text{-}X'Y'Z'$，其中Y'轴与Y轴相重合，类似地可得到C点在这个直角坐标系的直角坐标（x'，y'，z'）为

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos B\sin a\\ \sin B\sin a\\ \cos a\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

由解析几何知，轴线方向不同的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos c & 0 & -\sin c\\ 0 & 1 & 0\\ \sin c & 0 & \cos c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \tag{1.6}$$

将(1.4)和(1.5)式代入上式，从而得到

$$\sin a\sin B=\sin b\sin A \tag{1.7}$$

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \tag{1.8}$$

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A \tag{1.9}$$

将(1.7)和(1.9)式联合起来，可得到

$$\cos a\cos C=\sin a\cot b-\sin C\cot B \tag{1.10}$$

由于边和角以及它们的大小用一定的字母去表示完全是任意的，因此可用依次轮换边和角的字母，这样就得到下列球面三角形的基本公式

（1）正弦公式

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \tag{1.11}$$

（2）边的余弦公式

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\ \cos b&=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B\\ \cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

（3）角的余弦公式

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\\ \cos B&=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b\\ \cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

（4）第一五元素公式

$$\left.\begin{aligned}\sin a\cos B&=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A\\ \sin a\cos C&=\cos c\sin b-\sin c\cos b\cos A\\ \sin b\cos A&=\cos a\sin c-\sin a\cos c\cos B\\ \sin b\cos C&=\cos c\sin a-\sin c\cos a\cos B\\ \sin c\cos A&=\cos a\sin b-\sin a\cos b\cos C\\ \sin c\cos B&=\cos b\sin a-\sin b\cos a\cos C\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

（5）第二五元素公式

$$\left.\begin{aligned}\sin A\cos b&=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a\\ \sin A\cos c&=\cos C\sin B+\sin C\cos B\cos a\\ \sin B\cos a&=\cos A\sin C+\sin A\cos C\cos b\\ \sin B\cos c&=\cos C\sin A+\sin C\cos A\cos b\\ \sin C\cos a&=\cos A\sin B+\sin A\cos B\cos c\\ \sin C\cos b&=\cos B\sin A+\sin B\cos A\cos c\end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

（6）四元素公式

$$\left.\begin{aligned}\cos a\cos C&=\sin a\cot b-\sin C\cot B\\ \cos a\cos B&=\sin a\cot c-\sin B\cot C\\ \cos b\cos A&=\sin b\cot c-\sin A\cot C\\ \cos b\cos C&=\sin b\cot a-\sin C\cot A\\ \cos c\cos B&=\sin c\cot a-\sin B\cot A\\ \cos c\cos A&=\sin c\cot b-\sin A\cot B\end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

三、旋转矩阵

天体在不同的直角坐标系中的坐标值是不同的，它们之间的变换关系通常可利用旋转矩阵来完成。

若A是矩阵，$\vec{M}$和$\vec{N}$是列矢量，矩阵式

$$\vec{N}=A\vec{M} \tag{1.17}$$

可以看作为线性变换，此时矩阵A称为变换矩阵。例如(1.6)式就是这样的变换，它描述两个直角坐标系间的关系。由个$\overrightarrow{M}$和$\overrightarrow{N}$是同一矢量，因而两者的变换和矩阵是正交的。正交矩阵的特性是逆变换矩阵恰好是正变换矩阵的转置矩阵，同时正变换矩阵和它的转置矩阵的乘积是单位矩阵。

直角坐标系有六种不同形式的正交变换，可以把它绕每个轴进行旋转，也可以使每个轴反向。直角坐标系三个轴可以组成右旋坐标系，也可以组成左旋坐标系。右旋系统服从右手规则，左旋系统服从左手规则。

反向矩阵的形式很简单

$$P_X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad P_Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad P_Z=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1.18}$$

若用$R_K(\theta)$表示绕第K轴正向旋转角度θ，下面的表达式定义三个旋转矩阵

$$R_X(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{1.19}$$

$$R_Y(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{1.20}$$

$$R_Z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.21}$$

其中θ以弧度表示。

利用旋转矩阵可进行直角坐标系间的变换。这样(1.6)式可简写为

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=R_Y(c)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \tag{1.22}$$

它描述$O\text{-}XYZ$坐标系与在XZ平面绕Y轴逆时针旋转c角后得到的新的坐标系$O\text{-}X'Y'Z'$间的关系。

应注意旋转矩阵不能交换，几个旋转矩阵的积应从右至左完成，例

$$R_X(\alpha)\cdot R_Y(\beta)\cdot R_Z(\gamma)$$

是先对于原系统的Z轴旋转γ角，然后对于变换后系统的Y轴旋转β角，再对两次变换后系统的X轴旋转α角，最后得出三次变换后的系统。若旋转角全部很小的话，它们的余弦可假定为1，那时旋转矩阵变成可交换的。

可以证明，正旋转的逆变换是负旋转，即

$$[R_J(\alpha)\cdot R_K(\beta)]^{-1}=R_K^T(\beta)\cdot R_J^T(\alpha)=R_K(-\beta)\cdot R_J(-\alpha) \tag{1.23}$$

其中上标T代表转置。

四、恒星在天球上的位移公式

在处理球面天文学的各种改正时，常涉及到因某些原因引起恒星在天球上位移。恒星的位移总是沿着通过该恒星到某一固定点的大圆上，并且是个小量。

在图1.3中，设P为北天极，σ为某颗恒星，A为某一固定点。由于某种原因，恒星沿着大圆$A\sigma L$位移到σ'点。令A的赤道坐标为α_0和δ_0，σ的赤道坐标为α和δ，σ'的赤道坐标为α'和δ'。$A\sigma=\theta$，$\sigma\sigma'=d\theta$。在窄球面三角形$P\sigma\sigma'$中，通过σ'点作以P为极的小圆弧与$P\sigma$相交于U，有$U\sigma'=(\alpha'-\alpha)\cos\delta$，$U\sigma=\delta'-\delta$。由小直角三角形$U\sigma\sigma'$可得

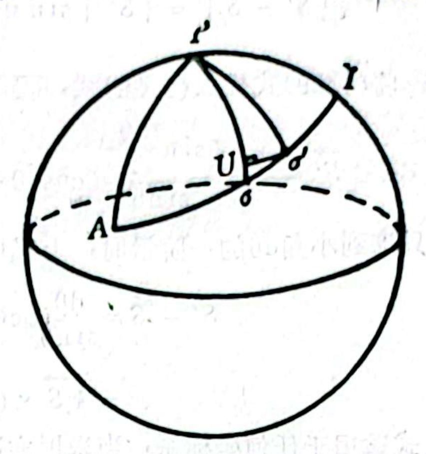


图1.3　恒星在天球上的位移

$$\left.\begin{aligned}(\alpha'-\alpha)\cos\delta&=\sigma\sigma'\cdot\sin P\sigma\sigma'\\ \delta'-\delta&=\sigma\sigma'\cdot\cos P\sigma\sigma'\end{aligned}\right\}\tag{1.24}$$

由球面三角形$PA\sigma$，应用正弦公式和五元素公式可得

$$\left.\begin{aligned}&\sin A\sigma\sin A\sigma P=\cos\delta_0\sin(\alpha-\alpha_0)\\ &\sin A\sigma\cos A\sigma P=\sin\delta_0\cos\delta-\cos\delta_0\sin\delta\cos(\alpha-\alpha_0)\end{aligned}\right\}\tag{1.25}$$

令

$$\sigma\sigma'=k\sin A\sigma\tag{1.26}$$

其中k为常数，将(1.26)式代入到(1.24)式，并考虑到$\angle P\sigma\sigma'=180°-\angle A\sigma P$，则有

$$\left.\begin{aligned}&\alpha'-\alpha=k\sec\delta\sin A\sigma\sin A\sigma P=k\sec\delta\cos\delta_0\sin(\alpha-\alpha_0)\\ &\delta'-\delta=-k\sin A\sigma\cos A\sigma P=k[\sin\delta\cos\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0)-\cos\delta\sin\delta_0]\end{aligned}\right\}\tag{1.27}$$

因此，只要把k值和A点的赤道坐标α_0，δ_0代入上式，就可求得恒星在天球上的位移。注意在图1.3中，当恒星向A点方向移动时，k为负值。

恒星在天球上的位移也可用矢量形式表示。图1.4中，设$\vec{S}$是σ方向的单位矢量，$\vec{S'}$是σ'方向的单位矢量。$\vec{S_0}$是A方向的单位矢量。由图可得

$$\vec{S'}-\vec{S}=\vec{b}-\vec{a}\tag{1.28}$$

其中　$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{S_0}$，$\vec{b}=|\vec{b}|\vec{S}$，

且　$\alpha=90°+\dfrac{d\theta}{2}$，有

图1.4　用矢量表示的恒星位移

$$\left.\begin{aligned}|\vec{a}|&=|\vec{S'}-\vec{S}|\sin\alpha/\sin\theta=|\vec{S'}-\vec{S}|\cos\frac{d\theta}{2}/\sin\theta\\ |\vec{b}|&=|\vec{S'}-\vec{S}|\sin(\alpha+\theta)/\sin\theta=|\vec{S'}-\vec{S}|\cos(\theta+\frac{d\theta}{2})/\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{1.29}$$

其中

$$|\vec{S}' - \vec{S}| = |\vec{S}'| \sin d\theta / \sin\alpha = 2\sin\frac{d\theta}{2} \tag{1.30}$$

将(1.29)式代入(1.28)式，得

$$\vec{S}' - \vec{S} = \frac{2\sin\frac{d\theta}{2}}{\sin\theta}\left[\cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\vec{S} - \cos\frac{d\theta}{2}\vec{S}_0\right] \tag{1.31}$$

当只准到小角$d\theta$的一阶量时，上式可简化为

$$\begin{aligned}\vec{S}' - \vec{S} &= \frac{d\theta}{\sin\theta}\left[\cos\theta\,\vec{S} - \vec{S}_0\right] \\ &= k\vec{S} \times (\vec{S} \times \vec{S}_0)\end{aligned} \tag{1.32}$$

上式适用于任何坐标系，当采用赤道坐标系的形式，就成为(1.27)式。

第二节　天球坐标系

对于以观测者为中心的天球来说，由于地球自转，天球和天体每日旋转一周，旋转的方向是自东向西。天球上有的点和圈随天球旋转，如赤道、黄道、北黄极、二分点和二至点。赤道在原地转动，赤道上的二分点在一天内时而过子午圈，时而过东点和西点，黄道则在空间不断地摆动，北黄极和二至点象天体一样作周日视运动。有的点和圈则不随天球旋转，如天极、天顶、真地平、子午圈。利用上述某些点和圈，可以在天球上建立坐标系。

一、地平坐标系

根据铅垂线方向来确定第一极的坐标系统称为地平坐标系。这个第一极就是观测者的天顶，基本圈为观测者的真地平，第二极称为天底。观测者的天顶方向确切地说就是观测者所用仪器的天顶，也就是望远镜的铅垂线方向。通常认为天顶相对于一个与地球本体相固连的坐标系的方向将不变。地平坐标系的零经圈为连接天顶和天底并通过北天极的半个大圆。

北天极的通常定义是地球自转轴通过地球北极延长后与天球的交点。

地平坐标系的纬角称为高度，常用h表示。余纬角称为天顶距，用z表示。经角称为方位角，常用A表示，从北点向东计量，有时方位角也从南点向西计量，用A_s表示。相应的直角坐标系是左旋的，如图1.5。

图1.5　地平坐标系

在地平坐标系中天体方向的单位矢量按(1.3)

式为

$$\vec{S}(A,h)=\begin{pmatrix}\cos A\ \cos h\\ \sin A\ \cos h\\ \sin h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos A\ \sin z\\ \sin A\ \sin z\\ \cos z\end{pmatrix}\tag{1.33}$$

地平坐标系是直接定义的，便于实现，易于进行直接观测。此外，天顶距的测量在求得恒星位置时起重要作用。但地平坐标系存在两个缺陷：一是对不同的观测者因彼此的天顶不同，恒星的地平坐标也是不同；二是恒星的地平坐标随周日运动而变化，并且是非线性的，这种随测站和时间而异的性质使记录天体位置的各种星表不能采用地平坐标系。

二、赤道坐标系

地球赤道面延伸后与天球相交的大圆称为天赤道。天赤道是赤道坐标系的基本圈。第一极是北天极。

赤道坐标系的纬角称为赤纬，它与观测地点无关，常用δ表示。赤纬的余角称为北极距，常用p表示。取观测者的子午圈为零经圈，如果选取左旋直角坐标系，如图1.6，则在此系统中的经角称为时角，常用t表示，从0^h计量到24^h，这一坐标系称为时角坐标系，又称为第一赤道坐标系。

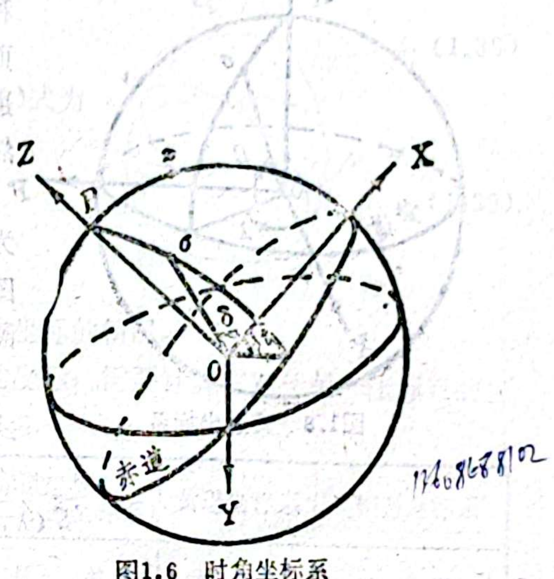


图1.6 时角坐标系

在时角坐标系中，天体方向的单位矢量按(1.3)式为

$$\vec{S}(t,\delta)=\begin{pmatrix}\cos t\ \cos\delta\\ \sin t\ \cos\delta\\ \sin\delta\end{pmatrix}\tag{1.34}$$

由于地球绕轴自转，时角随时间而迅速地变化，在一恒星日内增加24^h。对任一给定地点，时角坐标相对于恒星而运动。此外由于各地的子午圈各不相同，同一天体的时角在同一瞬间随地点而变化。

引入一个新的经角可消除时角坐标系的缺陷，它是由一个和天球一起作周日旋转的点作为零点来量度。零点选在春分点上，它是黄道对赤道的升交点。在此坐标系中的经角称为赤经，常用α来表示。自0^h计量到24^h。相应的直角坐标系是右旋的，如图1.7。若已知天体的赤经α和赤纬δ，则该天体在天球上的位置就唯一地被确定了，而与地球自转无关，这一坐标系称为赤道坐标系，又称为第二赤道坐标系。赤道坐标系是最重要的天球坐标系。在各种星表和天文历表中通常列出的都是天体在赤道坐标系中的坐标，以供全球各地观测者使用。

图1.7 赤道坐标系

在赤道坐标系中，天体方向的单位矢量按(1.3)

式为

$$\vec{S}(\alpha,\delta)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\ \cos\delta\\ \sin\alpha\ \cos\delta\\ \sin\delta\end{pmatrix}\tag{1.35}$$

三、黄道坐标系

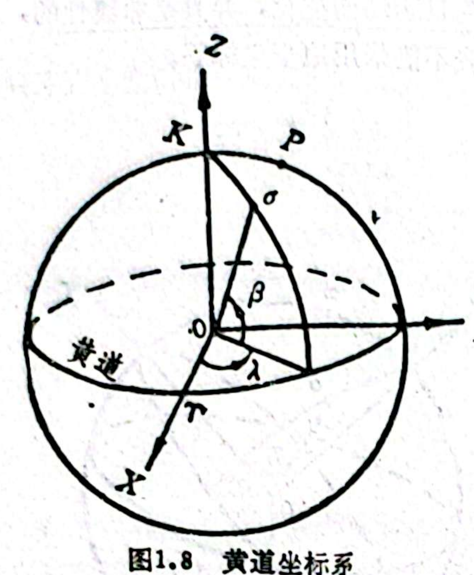


图1.8 黄道坐标系

在研究太阳系内各种天体的运动情况时，要用另一种天球坐标系即黄道坐标系。地球绕太阳公转的轨道平面称为黄道面。黄道面与天球相交的大圆称为黄道。黄道坐标系选取黄道为基本圈，北黄极为第一极，零点仍然取春分点。

黄道坐标系的纬角称为黄纬，常用β表示。经角称为黄经，常用λ表示。相应的直角坐标系是右旋的，如图 1.8。过北黄极和春分点的大圆是黄道坐标系的零经圈。

在黄道坐标系中，天体方向的单位矢量按（1．3）式为

$$\vec{S}(\lambda,\beta)=\begin{pmatrix}\cos\lambda\ \cos\beta\\ \sin\lambda\ \cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}\tag{1.36}$$

天体的黄道坐标和赤道坐标一样均不随观测时间和观测地点而变。

黄道和赤道间的交角称为黄赤交角，常用 ε 来表示，它是北黄极与北天极之间的角距离。

四、银道坐标系

在研究遥远的河外星系等位置及有关恒星动力学的某些理论工作中，常常采用银道坐标系。

银河系的主要部分呈扁平的圆盘状结构，它的平均平面称为银河系对称面。经过太阳系质心平行于银河系对称面的平面称为银道面，它与天球相交的大圆称为银道。选取银道为基本圈的天球坐标系称为银道坐标系，第一极为北银极。银道坐标系的零点取在银河系中心（简称银心）方向。

银道坐标系的纬角称为银纬，常用 b 表示。经角称为银经，常用 l 表示，相应的直角坐标系是右旋的。

银道坐标系相对赤道坐标系的定向可用北银极的赤

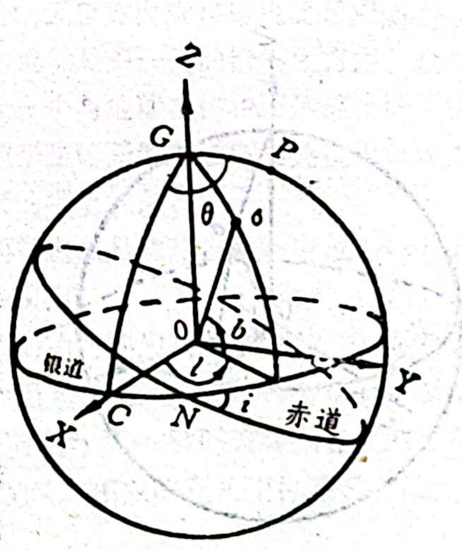


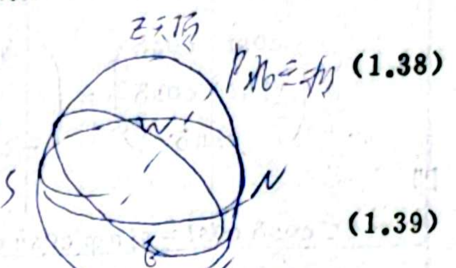
图1.9 银道坐标系

道坐标(α_G, δ_G)和零点的位置角θ来确定。图1.9中，P为北天极，G为北银极，C为银道坐标系的零点。对1950.0历元，这三个参数的采用值为

$$\left.\begin{aligned} \alpha_G &= 12^h49^m = 192°15' \\ \delta_G &= 27°24' \\ \theta &= 123° \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

银道与天赤道在天球上相交于两点，由北银极G向银道面看去，按逆时针方向从赤道以南向北通过赤道的那一个点N，称为银道对天赤道的升交点，另一点就是降交点（在天球的后面）。1958年以前曾采用银道升交点作为银道坐标系的零点。升交点的赤经α_N，银道和天赤道的交角i与北银极的赤道坐标(α_G, δ_G)之间有下列关系

$$\left.\begin{aligned} \alpha_N - \alpha_G &= 90° \\ i + \delta_G &= 90° \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$



在银道坐标系中，天体方向的单位矢量按按(1.3)式为

$$\vec{S}(l,b) = \begin{pmatrix} \cos l \ \cos b \\ \sin l \ \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

五、天球坐标系间的变换

表1.1总结了上述五种坐标系的球面坐标和直角坐标的情况。

在实际的工作中往往已知天体对于某一坐标系的坐标，需要计算它对于另一坐标系的坐

表1.1 五种天球坐标系

坐标系		地平坐标系	时角坐标系（第一赤道坐标系）	赤道坐标系（第二赤道坐标系）	黄道坐标系	银道坐标系
基本圈		真地平	赤道	赤道	黄道	银道
第一极		天顶	北天极	北天极	北黄极	北银极
经角零点		北点（或南点）	赤道最高点	春分点	春分点	银心方向
经角μ		方位角A	时角t	赤经α	黄经λ	银经l
纬角ν		高度h	赤纬δ	赤纬δ	黄纬β	银纬b
余纬角η		天顶距z	北极距p	北极距p	黄极距r	—
左旋或右旋		左旋	左旋	右旋	右旋	右旋
直角坐标系的正向	X	北点（或南点）	赤道最高点	春分点	春分点	银心方向
	Y	$A=90°$	$t=6^h=90°$	$\alpha=6^h=90°$	$\lambda=90°$	$l=90°$
	Z	天顶	北天极	北天极	北黄极	北银极

标。同一天体的不同坐标之间的关系，可以利用球面三角形的基本公式或旋转矩阵求出。

时角坐标和地平坐标的关系可通过地理纬度φ来联系。设已知天体σ的地平坐标是(A_s, h)，求相应的时角坐标(t, δ)。图1.10中，Z为天顶，P为北天极。设地平坐标系的方位角A_s从南点起量，则$O\text{-}XYZ$为地平直角坐标系。φ为观测地点的纬度。$O\text{-}X'Y'Z'$为时角直角坐标系，它是$O\text{-}XYZ$坐标系的XZ平面绕Y轴逆时针旋转$90°-\varphi$的结果。注意这里地平和时角坐标系都是左旋坐标系，因此有

$$\vec{S}(t,\delta) = R_Y(\varphi - 90°)\vec{S}(A_s, h) \tag{1.40}$$

将(1.33)和(1.34)式代入上式，并应用(1.20)式，有

$$\begin{pmatrix} \cos t \ \cos\delta \\ \sin t \ \cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos A_s \ \cos h \\ \sin A_s \ \cos h \\ \sin h \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

即

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\cos t &= \sin\varphi\cos h\cos A_s + \cos\varphi\sin h \\ \cos\delta\sin t &= \cos h\sin A_s \\ \sin\delta &= -\cos\varphi\cos h\cos A_s + \sin\varphi\sin h \end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

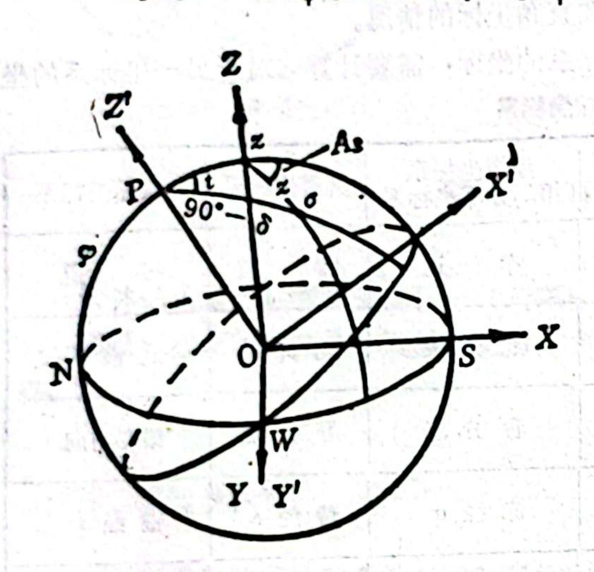


图1.10　时角坐标和地平坐标的关系

(1.42)式也可利用图1.10中天文三角形$PZ\sigma$及球面三角形的基本公式(五元素、正弦、余弦公式)得到。

赤道坐标和时角坐标的关系可由恒星时S来联系，有

$$\vec{S}(\alpha,\delta) = P_Y R_Z(S)\vec{S}(t,\delta) \tag{1.43}$$

上式即得大家熟知的关系式

$$\alpha = S - t \tag{1.44}$$

黄道坐标和赤道坐标的关系可由黄赤交角ε来联系，有

$$\vec{S}(\lambda,\beta) = R_X(\varepsilon)\vec{S}(\alpha,\delta) \tag{1.45}$$

即

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\lambda &= \cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha + \sin\varepsilon\sin\delta \\ \sin\beta &= -\sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha + \cos\varepsilon\sin\delta \end{aligned}\right\} \tag{1.46}$$

银道坐标和赤道坐标的关系可由北银极的赤道坐标(α_G, δ_G)和零点的位置角θ来联系，有

$$\vec{S}(l,b) = R_Z(90° - \theta)R_X(90° - \delta_G)R_Z(\alpha_G + 90°)\vec{S}(\alpha,\delta) \tag{1.47}$$

注意由于α_G，δ_G和θ的采用值是相对1950.0历元，因而天体的赤道坐标(α,δ)必须参照于1950.0历元的赤道和分点。银道坐标与赤道坐标之间的转换并不要求有很高的精度，通常有专门的换算表可用。

表1.2 天球坐标系间的变换

变换后系统 \ 原系统	地平（方位角从南点起量）	时角	赤道	黄道	银道
地平	$\vec{S}(A_s,h)$	$R_Y(90°-\varphi)$	$R_Y(90°-\varphi)P_YR_Z(S)$	$R_Y(90°-\varphi)R_YR_Z(S)\cdot R_X(-\varepsilon)$	$R_Y(90°-\varphi)R_YR_Z(S)\cdot R_Z(-90°-\alpha_G)R_X(\delta_G-90°)R_Z(\theta-90°)$
时角	$R_Y(\varphi-90°)$	$\vec{S}(t,\delta)$	$P_YR_Z(S)$	$R_YR_Z(S)R_X(-\varepsilon)$	$R_YR_Z(S)R_Z(-90°-\alpha_G)\cdot R_X(\delta_G-90°)R_Z(\theta-90°)$
赤道	$P_YR_Z(S)R_Y(\varphi-90°)$	$P_YR_Z(S)$	$\vec{S}(\alpha,\delta)$	$R_X(-\varepsilon)$	$R_Z(-90°-\alpha_G)R_X(\delta_G-90°)R_Z(\theta-90°)$
黄道	$R_X(\varepsilon)P_YR_Z(S)\cdot R_Y(\varphi-90°)$	$R_X(\varepsilon)P_YR_Z(S)$	$R_X(\varepsilon)$	$\vec{S}(\lambda,\beta)$	$R_X(\varepsilon)R_Z(-90°-\alpha_G)\cdot R_X(\delta_G-90°)R_Z(\theta-90°)$
银道	$R_Z(90°-\theta)R_X(90°-\delta_G)R_Z(\alpha_G+90°)\cdot P_YR_Z(S)R_Y(\varphi-90°)$	$R_Z(90°-\theta)R_X(90°-\delta_G)R_Z(\alpha_G+90°)P_Y\cdot R_Z(S)$	$R_Z(90°-\theta)R_X(90°-\delta_G)\cdot R_Z(\alpha_G+90°)$	$R_Z(90°-\theta)R_X(90°-\delta_G)\cdot R_Z(\alpha_G+90°)R_X(-\varepsilon)$	$\vec{S}(l,b)$

类似地可求出其它坐标系之间的关系。逆向计算则可利用旋转矩阵的负旋转。表 1.2 给出了天球坐标系间的变换关系。两个坐标系之间的关系可以有不同的变换矩阵形式，但结果应是相同的。

在某些天文工作中，不仅要知道天体在天球上的二维球面坐标，而且还必须知道它的空间位置，比如有关恒星空间运动的研究就是如此。三维极坐标系统是在二维球面坐标系的基础上增加一条向径 r 构成的。向径是坐标原点到所研究天体的线距离。因相应的二维球面坐标系的不同，所以又有三维赤道球面坐标和三维黄道球面坐标等不同的坐标系统。对三维赤道球面坐标系的空间位置矢量 $\vec{r}$，可以用它的赤经，赤纬和向径唯一地加以确定，即

$$\vec{r} = r\vec{S}(\alpha, \delta) \tag{1.48}$$

第三节 ~~恒星参考系~~

研究天体的空间运动要求在天球上建立一个惯性参考系。为此必须找出惯性参考系的实体，并在实际上实现它。

惯性参考系在经典力学意义下是指：在这个参考系中，当惯性力（如离心力，科里奥利力）消失时，牛顿的第一和第二定律成立。说得更精确一些，令

$$\vec{X} = \vec{X}(t) \tag{1.49}$$

是微分方程 $m\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = \vec{F}$ 的解，这是一个按牛顿第二定律建立的质点运动方程。$\vec{F}$ 仅按实际的物理状态来确定，与方程式所参考的坐标系无关。假定存在一个坐标系，在其中观测到的质点运动可用（1.49）式加以描述，我们就可以把这个系统看成是惯性参考系。这种“特殊”坐标系的坐标轴相对宇宙背景整体没有旋转，坐标原点没有加速。

为实现惯性参考系，首先应规定一个明确定义的坐标系，然后在这个坐标系和惯性系之间建立一种变换。最简易的方法是选择一个对于惯性坐标系仅有缓慢加速（旋转）的坐标系统作为一级近似，而这个近似坐标系基本上不需要求助于动力学方法就能实现。

恒星参考系（又称光学参考系）就是这样一个系统，理论上它只具有岁差旋转。在建立恒星参考系后，只要计算并测定出它的绝对旋转运动，就可以过渡到惯性坐标系。恒星参考系是以天球上的恒星作为它的实体建立的，它采用的基准点是恒星，并假设定标用的基本星运动的总和等于零。1984年起恒星参考系是由FK5基本星表来实现，它定义一个以太阳系质心为中心，J2000.0平赤道和平春分点为基准的天球平赤道坐标系。FK5星表包含 1535 颗均匀分布在天空的目视星等亮于 7.5 等的恒星（基本星），给出了每颗恒星的平赤道坐标及其随时间的变化量（岁差影响和自行），这样对任何历元在天球上不同区域都能复制出恒星参考系的网格。

恒星参考系是通过观测地球的运动在恒星周日视运动中的反映，以及它们在太阳系天体位于恒星间的视运动中的反映来加以确定的，因此必须对观测到的天体运动规律进行精确研究并进行改正。需要考虑的因素有：（1）地球绕轴的运动，（2）地球绕地月系质心的运

它坐标系之间的关系。逆向计算则可利用旋转矩阵的负旋转。表1.2给变换关系。两个坐标系之间的关系可以有不同的变换矩阵形式，但结果

中，不仅要知道天体在天球上的二维球面坐标，而且还必须知道它的空速空间运动的研究就是如此。三维极坐标系统是在二维球面坐标系的基构成的。向径是坐标原点到所研究天体的线距离。因相应的二维球面坐标三维赤道球面坐标和三维黄道球面坐标等不同的坐标系统。对三维赤道置矢量 $\vec{r}$，可以用它的赤经，赤纬和向径唯一地加以确定，即

$$\vec{r}=r\vec{S}(\alpha,\delta) \tag{1.48}$$

陆一　天球参考系的实现对!

第三节　~~恒星参考系~~

运动要求在天球上建立一个惯性参考系。为此必须找出惯性参考系的实E。

动力学意义下是指：在这个参考系中，当惯性力（如离心力，利里奥利第一和第二定律成立。说得更精确一些，令

$$\vec{X}=\vec{X}(t) \tag{1.49}$$

$=\vec{F}$ 的解，这是一个按牛顿第二定律建立的质点运动方程。$\vec{F}$ 仅按实际的方程式所参考的坐标系无关。假定存在一个坐标系，在其中观测到的质式加以描述，我们就可以把这个系统看成是惯性参考系。这种“特殊”宇宙背景整体没有旋转，坐标原点没有加速。

，首先应规定一个明确定义的坐标系，然后在这个坐标系和惯性系之简易的方法是选择一个对于惯性坐标系仅有缓慢加速（旋转）的坐标系这个近似坐标系基本上不需要求助于动力学方法就能实现。

（光学参考系）就是这样一个系统，理论上它只具有岁差旋转。在建立算并测定出它的绝对旋转运动，就可以过渡到惯性坐标系。恒星参考为它的实体建立的，它采用的基准点是恒星，并假设定标用的基本星84年起恒星参考系是由FK5基本星表来实现，它定义一个以太阳系质赤道和平春分点为基准的天球平赤道坐标系。FK5星表包含1535颗均等亮于7.5等的恒星（基本星），给出了每颗恒星的平赤道坐标及其影响和自行），这样对任何历元在天球上不同区域都能复制出恒星参

观测地球的运动在恒星周日视运动中的反映，以及它们在太阳系天体的反映来加以确定的，因此必须对观测到的天体运动规律进行精确研究的因素有：（1）地球绕轴的运动，（2）地球绕地月系质心的运

卯电参考系·称空间参考系

动，（3）地球绕太阳系质心的运动，（4）太阳本身和整个太阳系在空间的运动，（5）用来体现坐标系的恒星本身的运动。因此建立恒星参考系除要研究恒星和太阳系天体的视运动外，还和地球的运动及天文常数等联系在一起。

地球的运动可以分成下列三种：

（1）地面观测点相对于地球质心和太阳系质心的运动，这表现为极移，地球自转不均匀，周日和周年视差以及周日和周年光行差；

（2）地球自转轴的短周期运动，这表现为章动；

（3）地球自转轴的缓慢长期运动，这表现为岁差。

恒星参考系仅改正了地球运动的前面两项影响，因此它除了具有缓慢的岁差旋转运动外，还包括太阳和太阳系运动的影响，确定自行的系统误差以及其它的影响。地球的岁差运动和恒星的视运动给利用恒星来实现惯性参考系带来一定困难。

恒星参考系的天赤道是根据不同历元对大量恒星的观测确定的，而春分点则需观测太阳系天体来确定。春分点是赤道和黄道的交点，在天空中是没有任何标志的。常使用动力学分点来代替分点的真正位置。动力学分点可定义为地月系质心绕太阳运动的吻切轨道在赤道上升交点的位置。动力学分点是基于赤道和黄道的相互位置可用动力学方法确定的概念上，并且依赖于所使用的地球运动理论。

动力学分点和基本星表分点间的差称为分点改正。利用太阳系天体确定分点改正是建立在太阳系天体运动遵守牛顿定律的基础上。对太阳系天体应有按运动理论计算的精确历表。将太阳系天体的观测值和历表值进行比较，它们的差可以认为是坐标系的误差造成的，通过理论值去拟合观测值以改进行星和地球轨道根数的初始值和有关参数，同时可求出分点改正。

弗里克(W.Fricke)利用了1900—1970年期间太阳系天体的观测资料和FK4自行的处理，求得了对FK4基本星表的分点改正

$$\begin{aligned}E(t)&=E(t_0)+\dot{E}(t-t_0)\\&=0^s.035+0^s.085(t-1950)/100\end{aligned} \tag{1.50}$$

其中 t 为年份，$\dot{E}$ 为 E 对时间的导数，称为分点运动。FK5基本星表的分点即利用上式确定的，它和动力学分点基本上是一致的。因此由FK4星表变换到FK5星表，它们在赤经和赤经自行方面的关系分别为

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{FK4}+0^s.035=\alpha_{FK5}(\text{对历元1950.0})\\&(\mu_\alpha)_{FK4}+0^s.085=(\mu_\alpha)_{FK5}\end{aligned}\right\} \tag{1.51}$$

恒星参考系的原点可选取为站心、地心、日心和太阳系质心。由于地球自转运动在方向上是可变的，因而取站心为原点将存在加速运动。对地心原点和日心原点也有类似情况，因而它们都不适宜作为坐标原点。太阳系质心虽然也在运动，但它绕银心的速度基本上是常数。太阳系质心在半经约为 $r=10^4$ 秒差距（1秒差距 $=3.1\times10^{16}$ 米）的圆轨道上以周期 $T=2.5\times10^8$ 年运动，因此它的角速度 ω 为

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\simeq8.4\times10^{-16}\text{弧度/秒} \tag{1.52}$$

由此得加速度 a 为

$$a=r\omega^2\simeq2.0\times10^{-10}\text{米/秒}^2 \tag{1.53}$$

如此小的加速度几乎不能从观测中发现。因此通常选取太阳系质心作为恒星参考系的原点。

利用恒星参考系来建立惯性参考系，虽然是基于合理的科学原则，但必有一部分是不完善的或任意的，比如需要假设一个太阳系模型或地球模型作为依据，同时要确定一套参数。显然这样建立的惯性参考系并不是理想的，而仅仅是一个"协议的准惯性参考系"，简称CIRS。

目前协议的准惯性参考系除了可用恒星来实现外，还可利用太阳系天体(包括人造卫星)和河外射电源来实现，分别称为动力学参考系和河外射电源参考系。

动力学参考系又称历表参考系，它是基于太阳系天体运动方程中不存在坐标轴引起的旋转项。动力学参考系是利用太阳系天体或人造卫星来实现的，根据观测资料和太阳系天体运动理论可以计算出作为时间函数的天体视星历表。按不同天体，有行星参考系，月球参考系和人造卫星参考系。行星参考系是用行星历表来定义，如美国喷气推进实验室（JPL）的DE200历表，它是以太阳、行星、空间探测器的观测为依据，通过轨道运动方程数值积分来计算的。月球参考系是用月球历表来定义，JPL的LE200历表是当前最精确的一种。人造卫

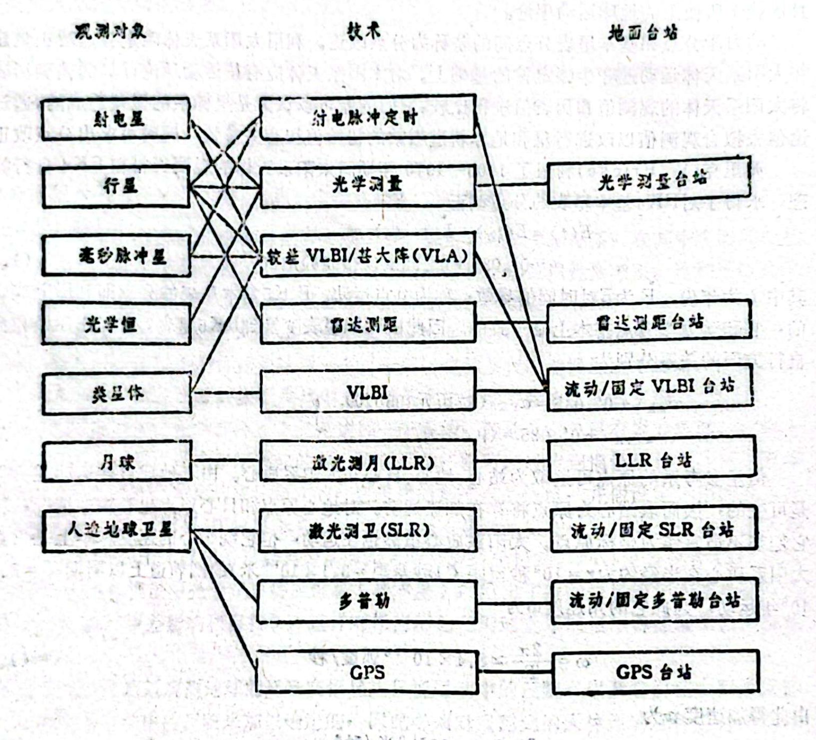


图1.11 CIRS的建立

星参考系通常用人造卫星星历表来定义。月球参考系和人造卫星
误差的累积将使它们不能在一个长时期中保持精确性。通过在
观测，并与河外射电源参考系相联结，可延长它们的使用期。

河外射电源参考系又称射电参考系，其基准点是河外射电
核，由于它们极为遥远，可认为方向是固定的。河外射电源参
的。通过对河外射电源进行高精度的甚长基线干涉测量(VLBI
1991年底，国际地球自转服务(IERS)给出的射电源表刊载了42
球上赤纬从$-82°$到$+85°$的范围内，这些射电源是相对于以太阳
道和平春分点为基准的天球平赤道坐标系，位置精度为0.2—2.
中的射电源数量还不够多，还没有一本综合统一的射电源表。
荐，不久的将来将采用河外射电源参考系作为CIRS，但在河
过渡阶段，仍将由恒星参考系来替代作为CIRS，同时为保证未来
还必须对各种不同类型的参考系进行比较，特别是要确定恒星
关系。天球上恒星参考系和河外射电源参考系有时也称为空固

图1.11给出了建立协议的准惯性参考系所对应的观测对象

第四节 恒星时和太阳时

地球上的观测者观察天球上的某些固定点，就可以得出以
统。以春分点作为参考点，由它的周日视运动所确定的时间称
点连续两次上中天的时间间隔叫做一个恒星日。

恒星时的起点是春分点的上中天时刻，恒星时在数值上等

$$S = t_\gamma$$

然而，春分点是观测不到的，我们只能通过观测恒星来间接地
点的时角t_γ等于任一颗恒星的时角t与其赤经α之和，即

$$S = t_\gamma = t + \alpha$$

若已知某一恒星的赤经α，则只要测定它在某一瞬间的时角t
恒星时S。当恒星上中天时 $t = 0$，(1.55)式变为

$$S = \alpha$$

由此可知，任何瞬间的地方恒星时正好等于该瞬间上中天恒星

对应于地球上每一个地方子午圈存在一种地方恒星时S，
时称为格林尼治恒星时S_G，它们的关系为

$$S = S_G + \lambda$$

其中λ为该地的经度。图1.12给出从北天极P方向看的天球俯视
恒星，γ为春分点，图表示了二分面，格林尼治子午面，测站子

若春分点在天球上的位置保持不变，则一恒星日自然是地球
于岁差、章动的影响（参阅第四章），春分点有缓慢的位置变

加速度几乎不能从观测中发现。因此通常选取太阳系质心作为恒星参考系的原点。
恒星参考系来建立惯性参考系，虽然是基于合理的科学原则，但也有一部分是不完
意的，比如需要假设一个太阳系模型或地球模型作为依据，同时要确定一套参数。
建立的惯性参考系并不是理想的，而仅仅是一个"协议的准惯性参考系"，简称

协议的准惯性参考系除了可用恒星来实现外，还可利用太阳系天体(包括人造卫星)
电源来实现，分别称为动力学参考系和河外射电源参考系。
学参考系又称历表参考系，它是基于太阳系天体运动方程中不存在坐标轴引起的旋
力学参考系是利用太阳系天体或人造卫星来实现的，根据观测资料和太阳系天体运
以计算出作为时间函数的天体视星历表。按不同天体，有行星参考系，月球参考系
星参考系。行星参考系是用行星历表来定义，如美国喷气推进实验室(JPL)的
表，它是以太阳、行星、空间探测器的观测为依据，通过轨道运动方程数值积分来
月球参考系是用月球历表来定义，JPL的LE200历表是当前最精确的一种。人造卫

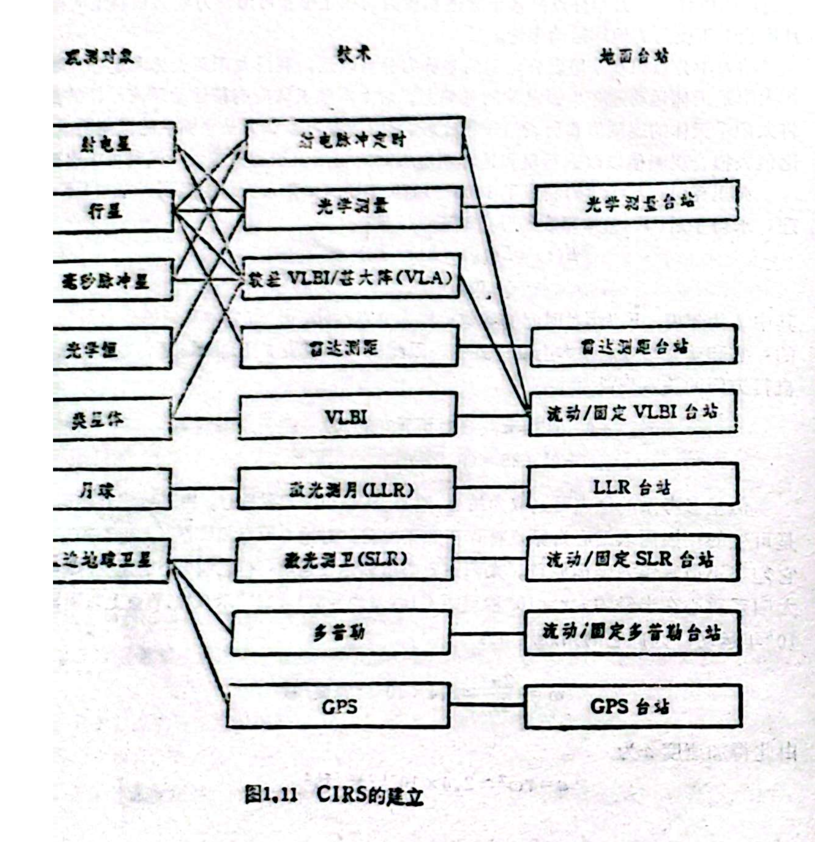


图1.11 CIRS的建立

星参考系通常用人造卫星星历表来定义。月球参考系和人造卫星参考系仅对中短期工作合适，误差的累积将使它们不能在一个长时期中保持精确性。通过在同一台站开展不同技术的连续观测，并与河外射电源参考系相联结，可延长它们的使用期。

河外射电源参考系又称射电参考系，其基准点是河外射电源，它们一般是类星体或星系核，由于它们极为遥远，可认为方向是固定的。河外射电源参考系是由射电源表来具体实现的。通过对河外射电源进行高精度的甚长基线干涉测量(VLBI)观测，可以编制射电源表。至1991年底，国际地球自转服务(IERS)给出的射电源表刊载了422颗射电源，它们均匀分布在天球上赤纬从−82°到+85°的范围内，这些射电源是相对于以太阳系质心为中心，J2000.0平赤道和平春分点为基准的天球平赤道坐标系，位置精度为0.2—2.1毫角秒(mas)。目前射电源表中的射电源数量还不够多，还没有一本综合统一的射电源表。国际天文学联合会(IAU)推荐，不久的将来将采用河外射电源参考系作为CIRS，但在河外射电源参考系建立和实现的过渡阶段，仍将由恒星参考系来替代作为CIRS。同时为保证未来的河外射电源参考系的建立，还必须对各种不同类型的参考系进行比较，特别是要确定恒星参考系和河外射电源参考系的关系。天球上恒星参考系和河外射电源参考系有时也称为空间参考系。

图1.11给出了建立协议的准惯性参考系所对应的观测对象和各种技术。

第四节 恒星时和太阳时

地球上的观测者观察天球上的某些固定点，就可以得出以地球自转为基础的时间测量系统。以春分点作为参考点，由它的周日视运动所确定的时间称为恒星时，常用 S 表示。春分点连续两次上中天的时间间隔叫做一个恒星日。

恒星时的起点是春分点的上中天时刻，恒星时在数值上等于春分点的时角，即有

$$S=t_{\gamma} \tag{1.54}$$

然而，春分点是观测不到的，我们只能通过观测恒星来间接地推算春分点的所在位置。春分点的时角 t_{γ} 等于任一颗恒星的时角 t 与其赤经 α 之和，即

$$S=t_{\gamma}=t+\alpha \tag{1.55}$$

若已知某一恒星的赤经 α，则只要测定它在某一瞬间的时角 t，就可用上式求出观测瞬间的恒星时 S。当恒星上中天时 $t=0$，(1.55)式变为

$$S=\alpha \tag{1.56}$$

由此可知，任何瞬间的地方恒星时正好等于该瞬间上中天恒星的赤经。

对应于地球上每一个地方子午圈存在一种地方恒星时 S，相对于格林尼治子午圈的恒星时称为格林尼治恒星时 S_G，它们的关系为

$$S=S_G+\lambda \tag{1.57}$$

其中 λ 为该地的经度。图1.12给出从北天极 P 方向看的天球俯视图，其中 Z 为天顶，σ 为某颗恒星，γ 为春分点，图表示了二分面，格林尼治子午面，测站子午面以及时圈的关系。

若春分点在天球上的位置保持不变，则一恒星日自然是地球的真实自转周期。事实上由于岁差、章动的影响（参阅第四章），春分点有缓慢的位置变化。根据春分点的运动情况，

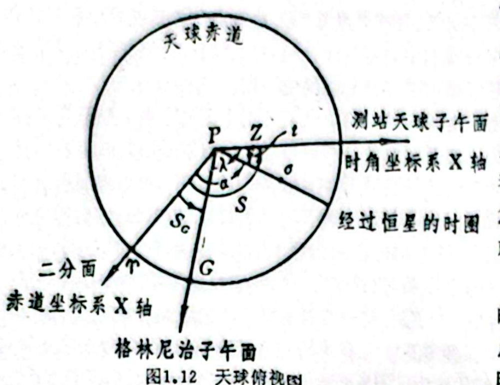


图1.12 天球俯视图

可以把它分为平春分点和真春分点。平春分点只受岁差的影响，它在黄道上沿着与太阳运动相反的方向运动。真春分点既受岁差又受章动的影响，它除了随同平春分点运动外还相对平春分点作复杂的周期性运动。因此相应地就有平恒星时和真恒星时。

平春分点在天球上周日运行的速度是地球自转角速度与春分点位移速度的合成，因此平恒星时S的变化可以表示为

$$\frac{dS}{dt}=\omega+\frac{d}{dt}(m_A) \tag{1.58}$$

其中ω为地球自转角速度，m_A是赤经总岁差，它可以表示为

$$m_A=mt+m't^2 \tag{1.59}$$

对(1.58)式积分，可得到平恒星时S为

$$S=S_0+\omega t+m_A=S_0+(\omega+m)t+m't^2 \tag{1.60}$$

其中S_0为起始平恒星时，通常取为零。

由(1.60)式可见，平恒星时不是一个均匀的时间计量系统，因为即使假定地球自转是均匀的，也存在加速项$m't^2$。平恒星时由于岁差而呈现出长期变化，但是因为它在天文学中有特殊用处，所以仍有存在的价值。

将平恒星时S加上章动项改正，我们称为真恒星时$S_{真}$，即

$$\begin{aligned}S_{真}&=S+\Delta\psi\cos\varepsilon\\&=S_0+(\omega+m)t+m't^2+\Delta\psi\cos\varepsilon\end{aligned} \tag{1.61}$$

其中$\Delta\psi\cos\varepsilon$为赤经章动（又称二分差），它是黄经章动$\Delta\psi$在赤道上的分量。黄经章动是一个复杂的周期项，可分为与月亮升交点黄经和太阳黄经有关的长周期项和与月亮运动有关的短周期项。黄经章动的变化是不均匀的，因此真恒星时更不是均匀的时间标尺。

以真太阳视圆面中心作为参考点，由它的周日视运动所确定的时间称为真太阳时。真太阳视圆面中心连续两次上中天的时间间隔称为真太阳日。

真太阳时是以真太阳的时角$t_\odot$来计量的，但为了照顾日常生活习惯，实际上把真太阳时$m_\odot$定义为真太阳时角$t_\odot$加上12^h，即

$$m_\odot=t_\odot+12^h \tag{1.62}$$

若$t_\odot>12^h$，则从上式减去24^h。

真太阳的视运动是地球自转及公转运动的共同反映。由于地球的公转轨道是椭圆，又受到月球及行星的摄动作用，它的公转速度不是匀速的，同时黄道和赤道并不重合，有一个ε的交角，这两个原因使得真太阳日的长度不是一个固定的量。由观测发现最长和最短真太阳日相差达51秒之多，显然它不宜于作为计量时间的单位。

为了弥补真太阳的缺陷，纽康(S.Newcomb)引入了假想的参考点——平太阳。首先设

想有一个黄道平太阳，它在黄道上的运行速度等于真太阳视运动的平

时经过近地点和远地点。黄道平太阳的黄经变化可表示为

$$\frac{d\lambda_s}{dt}=n+\frac{d}{dt}(p_A)$$

其中n为真太阳视运动的平均速度，p_A是黄经总岁差，它可以表示为

$$p_A=pt+p't^2$$

对(1.63)式积分，可得到黄道平太阳的黄经为

$$\lambda_s=\lambda_0+nt+p_A=\lambda_0+(n+p)t+p't^2$$

其中λ_0是历元$t=0$时黄道平太阳的黄经。

然后再设想存在一个赤道平太阳，在历元$t=0$时，其赤经为α_0，

道上的周年运行速度为μ，考虑到春分点受岁差影响，于是在历元t时赤

$$\alpha_s=\alpha_0+\mu t+m_A=\alpha_0+(\mu+m)t+m't^2$$

为使赤道平太阳在赤道上作匀速运动，令其周年运动速度和黄道平

使赤道平太阳赤经尽量靠近黄道平太阳的黄经，即规定

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0&=\lambda_0\\\mu+m&=n+p\end{aligned}\right\}$$

于是赤道平太阳的时角t_s根据(1.55)，(1.60)和(1.66)式为

$$t_s=S-\alpha_s=(S_0-\alpha_0)+(\omega-\mu)t$$

以赤道平太阳作为参考点，由它的时角可给出平太阳时。平太阳时是

赤道平太阳连续两次下中天的时间间隔叫做一个平太阳日。因此平太阳

时角加上12^h，即

$$m_s=t_s+12^h=S-\alpha_s+12^h$$

若$t_s>12^h$，则应从上式中减去24^h。平太阳时简称为平时。1960年前

单位秒定义为平太阳秒，即一个平太阳日的86400分之一。

在格林尼治的平太阳时称为世界时UT。对应于地球上每一个地方

平时m_s，它和世界时的关系为

$$m_s=UT+\lambda$$

其中λ为该地的经度。

由(1.57)，(1.69)和(1.70)式可得世界时UT与格林尼治平恒星时

$$UT=S_0-\alpha_s+12^h=(S_0-\alpha_0)+(\omega-\mu)t+12^h$$

由上式可以看出，如果地球自转角速度ω不变，亦即地球自转速率是均

一种均匀的时间测量系统。长期以来世界时一直被作为均匀的时间测

现了地球自转速度不均匀，从而动摇了它的前提。

1984年前世界时与格林尼治平恒星时的关系式是根据纽康给出的

式。纽康根据250年中对太阳的观测资料分析以及地球的公转运动理

$$\left.\begin{aligned}\lambda_0&=279^\circ41'27''.54=18^h38^m45^s.836\\n+p&=129602768''.13/\text{儒略世纪}=8640184^s.542/\text{儒略世纪}\\m&=4608''.60840/\text{儒略世纪}=307^s.24056/\text{儒略世纪}\\m'&=1''.3935/(\text{儒略世纪})^2=0^s.0929/(\text{儒略世纪})^2\end{aligned}\right\}$$

想有一个黄道平太阳，它在黄道上的运行速度等于真太阳视运动的平均速度，并和真太阳同时经过近地点和远地点。黄道平太阳的黄经变化可表示为

$$\frac{d\lambda_s}{dt}=n+\frac{d}{dt}(p_A) \tag{1.63}$$

其中n为真太阳视运动的平均速度，p_A是黄经总岁差，它可以表示为

$$p_A=pt+p't^2 \tag{1.64}$$

对(1.63)式积分，可得到黄道平太阳的黄经为

$$\lambda_s=\lambda_0+nt+p_A=\lambda_0+(n+p)t+p't^2 \tag{1.65}$$

其中λ_0是历元$t=0$时黄道平太阳的黄经。

然后再设想存在一个赤道平太阳，在历元$t=0$时，其赤经为α_0，它以恒星为背景在赤道上的周年运行速度为μ，考虑到春分点受岁差影响，于是在历元t时赤道平太阳的赤经为

$$\alpha_s=\alpha_0+\mu t+m_A=\alpha_0+(\mu+m)t+m't^2 \tag{1.66}$$

为使赤道平太阳在赤道上作匀速运动，令其周年运动速度和黄道平太阳的速度相同，并使赤道平太阳赤经尽量靠近黄道平太阳的黄经，即规定

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0=\lambda_0\\ \mu+m=n+p\end{array}\right\} \tag{1.67}$$

于是赤道平太阳的时角t_s根据(1.55)，(1.60)和(1.66)式为

$$t_s=S-\alpha_s=(S_0-\alpha_0)+(\omega-\mu)t \tag{1.68}$$

以赤道平太阳作为参考点，由它的时角可给出平太阳时。平太阳时是从下中天时刻起算的，赤道平太阳连续两次下中天的时间间隔叫做一个平太阳日。因此平太阳时定义为赤道平太阳时角加上12^h，即

$$m_s=t_s+12^h=S-\alpha_s+12^h \tag{1.69}$$

若$t_s>12^h$，则应从上式中减去24^h。平太阳时简称为平时。1960年前国际单位制(SI)的时间单位秒定义为平太阳秒，即一个平太阳日的86400分之一。

在格林尼治的平太阳时称为世界时UT。对应于地球上每一个地方子午圈存在一种地方平时m_s，它和世界时的关系为

$$m_s=UT+\lambda \tag{1.70}$$

其中λ为该地的经度。

由(1.57)，(1.69)和(1.70)式可得世界时UT与格林尼治平恒星时S_G的关系式

$$UT=S_G-\alpha_s+12^h=(S_0-\alpha_0)+(\omega-\mu)t+12^h \tag{1.71}$$

由上式可以看出，如果地球自转角速度ω不变，亦即地球自转速率是均匀的，则世界时便是一种均匀的时间测量系统。长期以来世界时一直被作为均匀的时间测量系统应用着，后来发现了地球自转速度不均匀，从而动摇了它的前提。

1984年前世界时与格林尼治平恒星时的关系式是根据纽康给出的赤道平太阳赤经的表达式。纽康根据250年中对太阳的观测资料分析以及地球的公转运动理论，得到下列数值

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0=279^\circ41'27''.54=18^h38^m45^s.836\\ n+p=129602768''.13/\text{儒略世纪}=8640184^s.542/\text{儒略世纪}\\ m=4608''.60840/\text{儒略世纪}=307^s.24056/\text{儒略世纪}\\ m'=1''.3935/(\text{儒略世纪})^2=0^s.0929/(\text{儒略世纪})^2\end{array}\right\} \tag{1.72}$$

把这组数值代入(1.66)式，得赤道平太阳赤经的具体公式为

$$\begin{aligned}\alpha_s &= 279^\circ 41'27''.54 + 129602768''.13t + 1''.3935t^2 \\ &= 18^h38^m45^s.836 + 8640184^s.542t + 0^s.0929t^2\end{aligned} \tag{1.73}$$

其中 t 是从1900年1月0.5日起算的儒略世纪数。如果我们屏弃前面关于平太阳日的叙述性定义，则可以这样定义平太阳，平太阳是天球上一个假想的数学点，它的赤经由（1.73）式表示，赤纬是零。

(1.71)式也可写成

$$\begin{aligned}S_G &= UT + \alpha_s - 12^h \\ &= UT + 6^h38^m45^s.836 + 8640184^s.542t + 0^s.0929t^2\end{aligned} \tag{1.74}$$

显然，恒星时和世界时并不是相互独立的时间计量系统。通常由天文观测得到恒星时，然后由上式换算为世界时。（1.74）式中当UT＝0时，世界时0^h的格林尼治平恒星时为

$$S_G^0 = \alpha_s - 12^h = 6^h38^m45^s.836 + 8640184^s.542t + 0^s.0929t^2 \tag{1.75}$$

1984年起由于采用了IAU(1976)天文常数系统和FK5春分点，需要修改（1.75）式的数值表达式，以使由观测所测定的世界时在数值上和速率上保持连续。新的世界时0^h的格林尼治平恒星时的表达式为

$$S_G^0 = 6^h41^m50^s.54841 + 8640184^s.812866t + 0^s.093104t^2 - 6^s.2\times 10^{-6}t^3 \tag{1.76}$$

其中 t 为从J2000.0起算的儒略世纪数。（1.76）式就是目前天文年历中用来计算世界时0^h的格林尼治平恒星时的基本公式。

由(1.76)式容易求得格林尼治平恒星时的表达式为

$$\begin{aligned}S_G &= 67310^s.54841 + (876600^h + 8640184^s.812866)t + 0^s.093104t^2 - 6^s.2\times 10^{-6}t^3 \\ &= 18^h.6973746 + 879000^h.0513367t + 0^s.093104t^2 - 6^s.2\times 10^{-6}t^3\end{aligned} \tag{1.77}$$

近代的天文观测发现地球自转的速度并不是均匀不变的，除了由于潮汐摩擦力造成平太阳日的长度平均每百年增长0.0016秒的长期变化外，另外还有季节性变化及一些无法预测的不规则变化，因而动摇了世界时作为时间测量基准的地位。

从1956年起对于世界时引进了两项小的重要修正，一项是因为地极移动所引起的相应的经度改正值$\Delta\lambda$，引进这项修正以后，全球任何地方观测所得世界时在理论上才是一致的，另一项修正是地球自转速度的季节性变化的改正ΔT_s，由于它的每年变化规律相当固定，因此可以预先根据经验公式外推。

直接由各天文台根据测时结果计算出来的世界时称为UT0，引进$\Delta\lambda$修正以后的世界时称为UT1，再进行ΔT_s修正后的世界时称为UT2，它们之间的关系是

$$\left.\begin{aligned}UT1 &= UT0 + \Delta\lambda \\ UT2 &= UT1 + \Delta T_s = UT0 + \Delta\lambda + \Delta T_s\end{aligned}\right\} \tag{1.78}$$

其中$\Delta\lambda = (x\sin\lambda - y\cos\lambda)\tan\varphi$，它与观测地点的地理经纬度$(\lambda, \varphi)$和地极坐标$(x, y)$有关，$\Delta T_s$是根据大量的天文观测求得的经验改正。目前一直采用的ΔT_s经验公式为

$$\Delta T_s = +0^s.0220\sin 2\pi t - 0^s.0120\cos 2\pi t - 0^s.0060\sin 4\pi t + 0^s.0070\cos 4\pi t \tag{1.79}$$

其中 t 是以贝塞尔年为单位的日期

$$t = 2000.000 + (MJD + 51544.03)/365.2422 \tag{1.80}$$

MJD为约简儒略日。

UT2系统未消除地球自转的长期变化和不规则变化的影响，因而仍然是不均匀的。尽管目前世界时已经不是时间测量的基准，但它作为一种时间测量系统在天文学研究中仍有其特殊用途。

由(1.76)式不难得出恒星日与平太阳日长度之比为

$$r=\frac{S^d}{m_s^d}=0.997269566329084-5.8684\times10^{-11}t+5.9\times10^{-15}t^2 \tag{1.81}$$

而平太阳日与恒星日长度之比则为

$$\frac{1}{r}=\frac{m_s^d}{S^d}=1.002737909350795+5.9006\times10^{-11}t-5.9\times10^{-15}t^2 \tag{1.82}$$

若忽略（1.81）和（1.82）式等式右端的后面两项（主要是岁差速率变化引起的），有

$$\left.\begin{aligned} r&=1-\nu=0.997269566329084\\ \frac{1}{r}&=1+\mu=1.002737909350795 \end{aligned}\right\} \tag{1.83}$$

或

$$\left.\begin{aligned} &24^h\text{平恒星时}=24^h(1-\nu)\text{平太阳时}=23^h56^m04^s.09053\text{平太阳时}\\ &24^h\text{平太阳时}=24^h(1+\mu)\text{平恒星时}=24^h03^m56^s.55537\text{平恒星时} \end{aligned}\right\} \tag{1.84}$$

相对于恒星背景的地球自转角速度可由（1.77）式给出的 S_G 中扣除相应的赤经岁差求得，即

$$\begin{aligned} \omega&=\frac{d}{dt}(S_G-m_A)\simeq\frac{d}{dt}[67310^s.54841+(876600^h+8639877^s.317119)t]\\ &=15''04106717866910/\text{平太阳秒} \end{aligned} \tag{1.85}$$

其中

$$m_A=307^s.495747t+0^s.093104t^2+0^s.0024134t^3 \tag{1.86}$$

因此地球自转周期P为

$$P=\frac{2\pi}{\omega}=86164^s.09890369732=23^h56^m04^s.098904(\text{平太阳日}) \tag{1.87}$$

天文年历中列出了世界时0^h的格林尼治恒星时 S_G^0和格林尼治恒星时0^h的世界时M^0 的每天数值，从而可进行恒星时和世界时时刻的换算。

世界时M时的格林尼治恒星时为

$$S_G=S_G^0+M+\mu M \tag{1.88}$$

其中μM为平太阳时间隔化为恒星时间隔应加的改正。

地方平时m时的地方恒星时为

$$S=S_G^0+m+\mu m-\mu\lambda \tag{1.89}$$

格林尼治恒星时S_G时的世界时为

$$M=M^0+S_G-\nu S_G \tag{1.90}$$

其中νS_G为恒星时间隔化为平太阳时间隔应加的改正。若$M^0+S_G-\nu S_G$超过24^h，则 M^0 取前一天的格林尼治恒星时0^h的世界时，否则M^0取当天的值。

地方恒星时S时的地方平时为

$$m = M^0 + S - \nu S_G = M^0 + S - \nu S + \nu\lambda \qquad (1.91)$$

同样当 $M^0 + S - \nu S_G$ 超过24^h时，M^0取前一天的值。若求精确的时刻换算，还应考虑赤经章动的变化。

第五节　历书时和原子时

由于以地球自转周期为基础的时间测量系统（恒星时，太阳时等）不能作为时间测量基准，这样就必须谋求另外的运动形式作为时间测量基准。1960年起各国天文年历引入一种以太阳系内天体公转为基准的时间系统，称为历书时（ET），以代替世界时作为基本的时间计量系统。

天体力学以牛顿力学为基础建立了太阳系天体的运动理论，从而可以用运动方程中的时间变量为参数算出天体位置历表。显然这里的时间应当是数学上的均匀自变量，这种时间称为牛顿时。如果我们从天文观测求得了某一瞬间的天体位置，则可从其位置历表获得牛顿时。但是由于天体运动理论的缺陷及求解运动微分方程时由实测确定的积分常数包含误差，所以任何一个天体位置历表只能给出近似的牛顿时，通常称这种由天体位置历表给出的时间为历书时。不难理解，对于月球、太阳（实际上是地球）、水星、金星等的位置历表，它们各自给出的历书时是有微小差异的，在经过仔细研究以后，天文学家选用了纽康太阳历表中所用的均匀时系统作为历书时系统，这就是说历书时即纽康太阳历表中的时间变量。

纽康给出太阳几何平黄经（已消除光行差影响）为

$$\begin{aligned} L &= L_0 + L_1 t + L_2 t^2 \\ &= 279°41'48''.04 + 129602768''.13t + 1''.089t^2 \end{aligned} \qquad (1.92)$$

其中t是从1900年1月0.5日起算的儒略世纪数。历书时的时刻起算点就取在1900年1月0.5日，即格林尼治平午这一瞬间，这样就保证了世界时时刻与历书时时刻的衔接。在这一瞬间太阳几何平黄经为279°41′48″.04。历书时时间单位的基础是回归年。由(1.92)式可求出在$t=0$时的回归年长度为

$$\frac{36525 \times 86400^s \times 360 \times 60 \times 60''}{129602768.13} = 31556925^s.9747 \qquad (1.93)$$

因此历书时ET的定义是：起算的基本历元为1900年初附近太阳几何平黄经279°41′48″.04的瞬间，这一瞬间定为历书时1900年1月0日12时正；采用历书时1900年1月0日12时的回归年长度的31556925ˢ.9747分之一作为一个基本单位的历书时秒。

根据IAU的决议，从1960年起太阳系天体的历表以世界时为准改为以历书时为准进行计算，SI秒的定义也由平太阳秒改为历书时秒。

历书时是根据太阳历表来规定，因此由测定太阳的位置与其历表比较，可以求得相应于此时刻的历书时。比如在世界时T_U观测太阳的赤经为α，在太阳历表中查到赤经为α所对应的时间变量为T_E，那么世界时T_U瞬间的历书时即T_E，从而求得历书时和世界时之差$\Delta T = T_E - T_U$。将多次观测结果综合可得到一个较精确的ΔT值。这样任何瞬间的历书时ET均可用下式求出

$$ET = UT + \Delta T$$

太阳的周年视运动比较缓慢，如果观测太阳位置的误差为±0″
有±2ˢ.5的误差，因此实际上历书时的观测都是采用观测月球的办

布朗（E.W.Brown）根据对月球运动理论的研究，计算并出版
位置与布朗月历表进行比较所给出的ΔT必须换算到太阳历表的系
需要的历书时。利用改正公式将布朗月历表换算到历书时系统而重
月历表（简称ILE），后来改良月历表又经过了两次改进，每进行
性提高一步。根据这些不同的月历表，国际上先后采用过三种不同
（1960—1967年采用），ET_1（1968—1971年采用）和ET_2（1972

历书时与地球自转无关，用它来计量与地球自转有关的时角，
历书时系统中引入历书子午圈。

历书子午圈定义为地球表面上位于格林尼治子午圈以东$(1+\mu)$
$\Delta T = ET - UT$，$(1+\mu)$为平太阳时间隔化为恒星时间隔的因子，其
历书子午圈与格林尼治子午圈的差反映了地球自转的不均匀性。采
许多依赖于地球自转的天象就可以以历书时为时间变量来进行计算
作为参考子午圈时用世界时为时间变量来计算的情况完全一样。

图1.13给出了历书时，世界时及其有关量之间的联系。由图1.

（1）历书平恒星时S_E是平春分点相对于历书子午圈的时角
尼治平恒星时为S_G，则

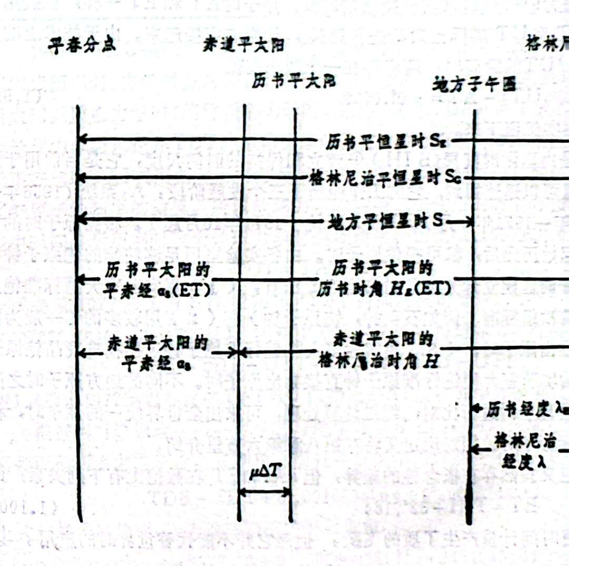


图1.13　历书时，世界时相互关系示意图

$$\mathrm{ET}=\mathrm{UT}+\Delta T \tag{1.94}$$

太阳的周年视运动比较缓慢，如果观测太阳位置的误差为±0″.1。则算出的历书时就会有±2′.5的误差，因此实际上历书时的观测都是采用观测月球的办法来确定的。

布朗(E.W.Brown)根据对月球运动理论的研究，计算并出版了月历表。把月球的观测位置与布朗月历表进行比较所给出的 ΔT 必须换算到太阳历表的系统上来，这样才能得到所需要的历书时。利用改正公式将布朗月历表换算到历书时系统而重新编算的月历表称为改良月历表（简称ILE），后来改良月历表又经过了两次改进，每进行一次改进，历书时的均匀性提高一步。根据这些不同的月历表，国际上先后采用过三种不同的历书时，分别称为$\mathrm{ET_0}$（1960—1967年采用），$\mathrm{ET_1}$（1968—1971年采用）和$\mathrm{ET_2}$（1972年起采用）。

历书时与地球自转无关，用它来计量与地球自转有关的时角，显然是不适合的，为此在历书时系统中引入历书子午圈。

历书子午圈定义为地球表面上位于格林尼治子午圈以东$(1+\mu)\Delta T$的一条子午圈，其中$\Delta T=\mathrm{ET}-\mathrm{UT}$，$(1+\mu)$为平太阳时间隔化为恒星时间隔的因子，其数值给出在（1.83）式。历书子午圈与格林尼治子午圈的差反映了地球自转的不均匀性。采用历书子午圈作为参考，许多依赖于地球自转的天象就可以以历书时为时间变量来进行计算，这和把格林尼治子午圈作为参考子午圈时用世界时为时间变量来计算的情况完全一样。

图1.13给出了历书时，世界时及其有关量之间的联系。由图1.13，我们可以得到：

（1）历书平恒星时 S_E 是平春分点相对于历书子午圈的时角(简称历书时角)，若格林尼治平恒星时为S_G，则

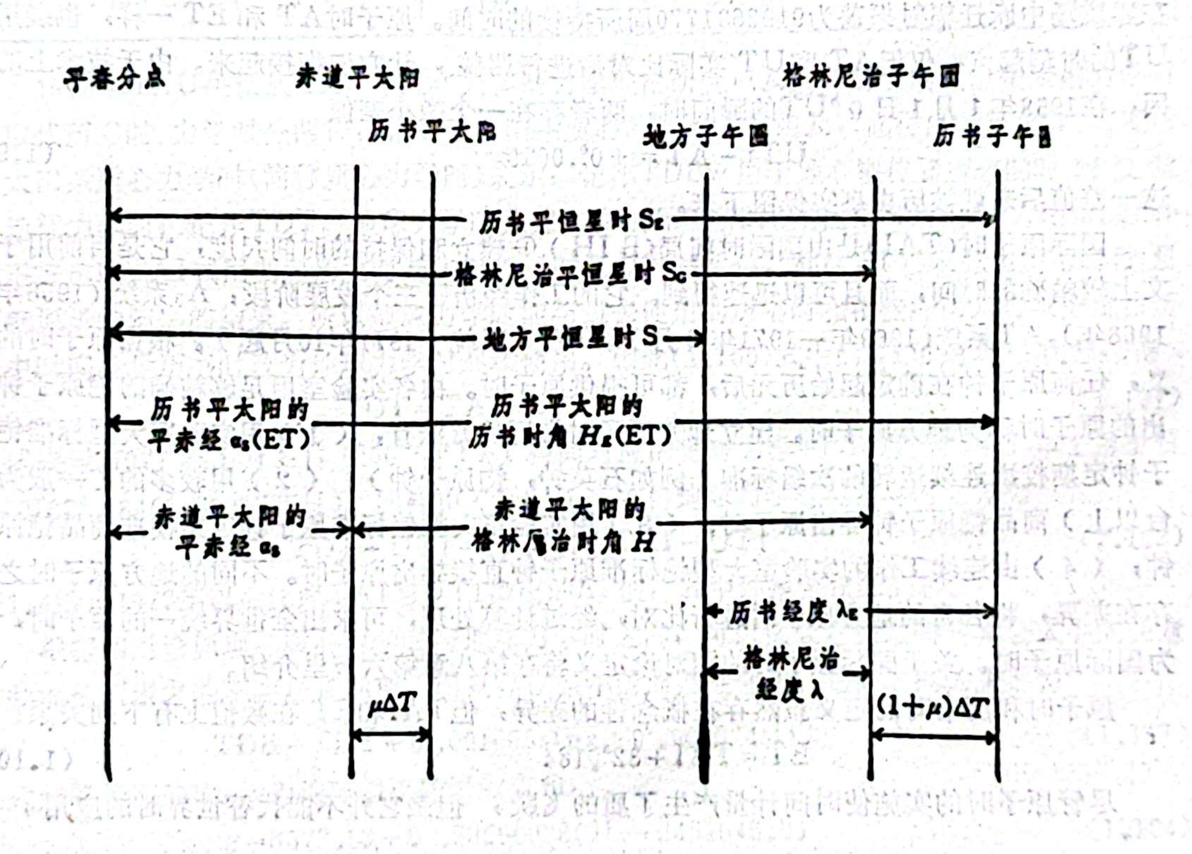


图1.13 历书时，世界时相互关系示意图

$$S_E = S_G + (1+\mu)\Delta T \tag{1.95}$$

当历书平恒星时等于某一个天体的赤经时，我们就说这个天体为历书上中天。

（2）历书平太阳是赤道平太阳以东$\mu\Delta T$处的一点。设$\alpha_S(\text{ET})$为历书平太阳的平赤经，α_s为赤道平太阳的平赤经，则有

$$\alpha_s(\text{ET}) = \alpha_s + \mu\Delta T \tag{1.96}$$

历书时是历书平太阳相对于历书子午圈的时角加上12^h，即

$$\text{ET} = H_E(\text{ET}) + 12^h \tag{1.97}$$

式中$H_E(\text{ET})$为历书平太阳的历书时角。

（3）历书经度λ_E是地方子午圈和历书子午圈间的夹角，有

$$\lambda_E = \lambda + (1+\mu)\Delta T \tag{1.98}$$

以地球绕太阳公转运动为基准的历书时，无论从理论上还是实践上都是不完善的。历书时定义中还关联到一些天文常数，天文常数系统的改变就会导致历书时的不连续。此外，实际测定历书时的精度不高，而且提供结果比较迟缓，不能及时满足高精度时间部门的要求。这些都是历书时的严重缺点。

历书时不能作为真正的均匀时间标准，为此人们开始从无限的宇宙空间转向精细的微观世界。原子时是以物质内部原子运动的特征为基础。本世纪50年代以来，物理实验技术和无线电电子学技术的飞跃发展，使得利用量子跃迁获得新的时间计量标准成为可能，而这种频率具有很高的稳定性和复现性。经过充分的酝酿和讨论之后，1967年第十三届国际度量衡会议通过了新的SI秒长——原子时秒长的定义：位于海平面上的铯原子Cs^{133}基态的两个超精细能级在零磁场中跃迁辐射振荡为9192631770周所持续的时间。原子时AT和ET一样，也袭用了UT的时刻起点，仅把AT和UT实际比对后进行调整，让它们衔接起来。由于技术上的原因，在1958年1月1日0^hUT的瞬间时，两者存在一个微小差值

$$\text{UT1} - \text{AT} = +0^s.0039 \tag{1.99}$$

这一差值后来就被历史事实保留下来。

国际原子时(TAI)是由国际时间局(BIH)①建立和保持的时间尺度，它是目前用于天文上较精确的时间，而且可以迅速得到。它的工作经历了三个发展阶段：A_3系统（1958年—1968年），AT系统（1969年—1971年9月），TAI系统（1971年10月起）。根据原子时的定义，任何原子钟在确定起始历元后，都可提供原子时。由各实验室用足够精确的铯原子钟导出的原子时称为地方原子时。建立地方原子时常用的方法有：（1）用实验室大型标准铯原子钟定期校准连续运转的次级标准（例如石英钟，铷原子钟）；（2）用较多的（一般为四台以上）商品铯原子钟导出原子时；（3）用实验室大型铯标准原子钟定期校准商品铯原子钟；（4）由连续工作的实验室大型铯标准原子钟直接导出原子时。不同的地方原子时之间存在差异，将各自的地方原子时进行比对，经过计算处理，可求出全世界统一的原子时，称为国际原子时。关于国际原子时的相对论定义将在第八章第六节里介绍。

原子时和历书时的定义虽然存在概念性的差异，但TAI和ET在数值上有下列关系，即

$$\text{ET} = \text{TAI} + 32^s.184 \tag{1.100}$$

尽管原子时的实施使时间计量产生了质的飞跃，但是它并不能代替世界时的应用，以

---

① 1988年起TAI改由国际计量局（BIPM）负责。

地球自转为基础的世界时仍然有其广泛的用途。为了兼顾对世界时时刻和原子时秒长两者的需要，国际上规定以协调世界时（简称UTC）作为标准时间和频率发布的基础。协调世界时的秒长与原子时秒长一致，在时刻上则要求尽量与世界时接近。从1972年起规定两者的差值保持在±0.9秒以内，为此可能在每年的年中或年底对协调世界时的时刻作一整秒的调整，加上一秒叫正跳秒，取消一秒叫负跳秒，具体的调整由国际时间局根据天文观测资料作出规定。表1.3给出了1972年至1992年UTC的时刻跳秒和TAI与UTC的差。

表1.3 UTC的时刻跳秒和TAI与UTC的差

日期 0^hUTC	跳秒	TAI-UTC	日期 0^hUTC	跳秒	TAI-UTC
1972年1月1日	$-0^s.1077580$	10^s	1980年1月1日	-1^s	19^s
7月1日	-1^s	11^s	1981年7月1日	-1^s	20^s
1973年1月1日	-1^s	12^s	1982年7月1日	-1^s	21^s
1974年1月1日	-1^s	13^s	1983年7月1日	-1^s	22^s
1975年1月1日	-1^s	14^s	1985年7月1日	-1^s	23^s
1976年1月1日	-1^s	15^s	1988年1月1日	-1^s	24^s
1977年1月1日	-1^s	16^s	1990年1月1日	-1^s	25^s
1978年1月1日	-1^s	17^s	1991年1月1日	-1^s	26^s
1979年1月1日	-1^s	18^s	1992年7月1日	-1^s	27^s

1976年IAU决议从1984年起在天体动力学理论研究以及天体历表的编算中采用力学时以取代历书时。力学时分两种：相对于太阳系质心的运动方程组及以此得出的历表，时间变量用太阳系质心力学时（简称质心力学时）表示，记作TDB；用于地心视位置历表的时间变量为地球力学时，记作TDT。地球力学时是建立在国际原子时基础上。TDT对TAI的时刻补偿正好选取TAI试用期间历书时与国际原子时之差的估算值。同时SI秒长是用历书时秒量度铯原子钟频率的结果。所以地球力学时能与过去使用的历书时相衔接，而且可以把过去历表中时间变量历书时改为地球力学时继续使用。因此(1.100)式中的ET可用TDT代替，得

$$TDT = TAI + 32^s.184 \qquad (1.101)$$

上式表示1977年1月1日$0^h00^m00^s$TAI瞬间对应的地球力学时TDT为1977年1月1日$0^h00^m32^s.184$(1.0003725日)。同样由（1.94）式可得地球力学时与世界时之差为

$$\Delta T = TDT - UT1 = 32^s.184 + TAI - UT1 \qquad (1.102)$$

表1.4给出1977年以后比对TAI与UT1得出的ΔT值，其中外推值仅给到秒。

根据相对论原理，质心力学时与地球力学时之间，可以选取它们之间转换公式中的任意常数而使两者之差不存在长期项，而只存在微小的周期性变化。它们之间的关系为

$$TDB = TDT + 0^s.001658\sin g + 0^s.000014\sin 2g \qquad (1.103)$$

上式忽略了高阶项，g为地球轨道的平近点角，

$$g = 357^\circ.53 + 0^\circ.98560028(JD - 2451545.0) \qquad (1.104)$$

关于TDB和TDT等天文时间尺度的进一步概念将在第八章第七节里介绍。

表1.4　世界时化算地球力学时的改正值ΔT

日　期 0^hUTC	ΔT	日　期 0^hUTC	ΔT
1977.0	$+47^s.52$	1986.0	$+54^s.87$
1978.0	48.53	1987.0	55.32
1979.0	49.59	1988.0	55.82
1980.0	50.54	1989.0	56.30
1981.0	51.38	1990.0	56.86
1982.0	52.17	1991.0	57.57
1983.0	52.96	1992.0	(59)
1984.0	53.79	1993.0	(59)
1985.0	54.34	1994.0	(60)

第六节　贝塞尔年和儒略年

“年”的长度实际反映了地球绕太阳公转的周期。从地球看来，即是太阳在天球上作周年运动。如果选用不同的参考点计量太阳周年视运动，则就有不同长度的“年”，以适应各种需要。下面取T为从1900年1月0.5日ET起算的儒略世纪数。

太阳连续两次经过平春分点所需要的时间间隔称为一个回归年。在这期间太阳平黄经增加360°，但由于春分点后退，太阳并没有运动一圈，有

$$1\text{回归年}=365^d.24219878-0^d.00000614T$$
$$=31556925^s.9747-0^s.5303T \qquad (1.105)$$

太阳在黄道连续两次通过某一恒星所需要的时间间隔称为一个恒星年，显然它和回归年仅相差一黄经总岁差。

$$1\text{恒星年}=365^d.25636042+0^d.000000111T$$
$$=31558149^s.5403+0^s0096T \qquad (1.106)$$

太阳连续两次经过近地点所需要的时间间隔称为一个近点年。由于近地点沿黄道向前运动，因此近点年比恒星年大约长$4^m.5$。近点年主要用于研究太阳的运动。

$$1\text{近点年}=365^d.25964134+0^d.00000304T$$
$$=31558433^s.0118+0^s.2627T \qquad (1.107)$$

太阳在天球上连续两次经过月球轨道的升交点所需要的时间间隔称为一个交点年（或称食年）。交点年对计算日食有重要作用。

$$1\text{交点年}=346^d.62003090+0^d00003244T$$
$$=29947970^s.6698+2^s.8028T \qquad (1.108)$$

儒略年规定为365日，每四年中有一闰年（366日），因此儒略年的平均长度为

$$1\text{儒略年}=365^d.25 \qquad (1.109)$$

儒略年比回归年要长，大约400个儒略年比400个回归年长3日。一儒略世纪为36525日。以儒略年作为基本单位定出的历法叫儒略历。

在历法中，一年必须包含日的整数叫做历年。为使历年的平均长度更接近回归年，格里高利(R.Gregory)对儒略年作了改进，得到了现在通用的民用年（或称公历年）。在每四个民用年中，设一闰年，凡能被4整除的就是闰年，但在400年中要去掉三个闰年，为此规定只有当世纪数能被4整除才算闰年，这样有

$$1\text{民用年} = \frac{365.25\times 400-3}{400} = 365^{d}.2425 \tag{1.110}$$

平太阳赤经增加360°所需要的时间间隔称为一个贝塞尔年。当平太阳赤经（已加光行差改正）恰好等于$18^{h}40^{m}$(280°)的瞬间称为贝塞尔年年首（或贝塞尔假年岁首），用年份前加符号B，年份号加.0表示之。以1950年为例，这一年的贝塞尔年年首记为B1950.0

$$\begin{aligned}1\text{贝塞尔年} &= 365^{d}.24219878-0^{d}00000785T\\ &= 31556925^{s}.9747-0^{s}.6786T\end{aligned} \tag{1.111}$$

贝塞尔年比回归年短$0^{s}.1483T$，这是由于赤道平太阳超过太阳实际平黄经的长期加速，这一差别一般可忽略，而把贝塞尔年看作与回归年一样长。

天文上标出某一特殊瞬间的时刻即历元常用年的小数来表示。任何贝塞尔年的同一小数，准确地对应于同一平太阳赤经。此外贝塞尔年的应用给出了一个固定的时间单位，因而在实际工作中是非常方便的。

计算相隔若干年两个日期之间的天数可用儒略日数，这是天文上应用的一种长期纪日法，它以倒退到公元前4713年1月1日格林尼治平午（即世界时12^{h}）为起算日期（公元前1年在天文上记为0年，公元前4713年在天文上记为－4712年），每天顺数而下，延续不断。天文年历载有每年每月零日世界时0时的儒略日（简写为 JD ），例如1992年2月1日0^{h}UT儒略日为2448653.5。随着岁月的推移，儒略日数字很大，为此引入约简儒略日，记为MJD．其定义为

$$\text{MJD} = \text{JD}-2400000.5 \tag{1.112}$$

MJD的起算日期为公元1858年11月17日0^{h}UT开始。

按照1976年召开的IAU第十六届大会的决议，天文坐标系和天文年历的计算从1984年起采用新的标准历元J2000.0取代B1900.0，同时时间单位采用儒略世纪代替回归世纪。年份前的J表示儒略历元。新的标准历元对应的儒略日为JD＝2451545.0,它是在纽康基本历元1900年1月0.5日（ JD＝2415020.0）之后整整一个儒略世纪（36525日）。新的标准历元用质心力学时TDB表示，以代替过去的世界时。某年的儒略年首与标准历元的间隔为儒略年365.25的倍数，例1992年儒略年首在1月1.5日 TDB记作J1992.0，而1993年儒略年首在1月0.25日TDB，记作J1993.0等。

儒略历元，贝塞尔历元和儒略日JD的关系为

$$\left.\begin{aligned}&\text{儒略历元} = \text{J}[2000.0+(\text{JD}-2451545.0/365.25]\\ &\text{贝塞尔历元} = \text{B}[1900.0+(\text{JD}-2415020.31352)/365.24219878]\end{aligned}\right\} \tag{1.113}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
J\,2000.0 &= 2000.1.1^{d}.5\text{TDB} \\
&= \text{JD}2451545.0 \\
B1900.0 &= 1900.1.1^{d}81352\text{ET} \\
&= \text{JD}2415020.31352
\end{aligned}\right\} \tag{1.114}
$$

由(1.113)式可得

$$
\left.\begin{aligned}
J1950.0 &= 1950.1.1^{d}.0\text{TDB} \\
&= \text{JD}2433282.5 \\
B1950.0 &= 1950.1.0^{d}.92346\text{ET} \\
&= \text{JD}2433282.42346
\end{aligned}\right\} \tag{1.115}
$$

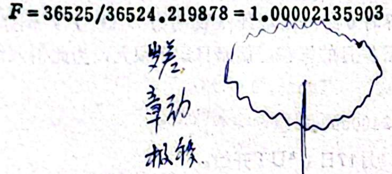
表1.5列出了几个重要的儒略日。

表1.5　几个重要历元的儒略日

贝塞尔历元（B）	儒略历元（J）	儒略日
1900.0	1900.000858	2415020.31352
1950.0	1949.999790	2433282.42345905
2000.0	1999.998722	2451544.5333981
1899.999142	1900.0	2415020.0
1950.000210	1950.0	2433282.5
2000.001278	2000.0	2451545.0

将回归世纪单位变换成儒略世纪单位需乘上下列因子

$$
F = 36525/36524.219878 = 1.00002135903 \tag{1.116}
$$



第一章　习　题

1．对球面三角形ABC，证明

$$
\begin{aligned}
da &= \cos C db + \cos B dc + K \sin b \sin c dA \\
dA &= -\cos c dB - \cos b dC + K^{-1} \sin B \sin C da
\end{aligned}
$$

其中

$$
K = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}\text{。}
$$

2．证明在等边球面三角形中，边和角满足下列条件

$$
\sec A - \sec a = 1\text{。}
$$

3．证明北黄极的天顶距为

$$
z = \cos^{-1}(\cos\varepsilon \sin\phi - \sin\varepsilon \cos\phi \sin T)
$$

其中T是地方恒星时。

4．两颗恒星A和B（赤纬分别为δ_1和δ_2）在同一瞬间升起，证明

$$
\tan\phi \tan\delta_1 = 1 - 2\tan^2\phi \tan^2\delta_2
$$

其中ϕ为纬度。

5．旧银道坐标系北银极的赤道坐标为$A = 12^{h}40^{m}$，$D = +28$
道与天赤道的升交点作为零点，利用旋转矩阵写出旧银道坐标和黄

6．地理坐标系的第一极为地球的北极，零经圈为通过第一极
右旋坐标系；地面坐标系的第一极为该地的天顶，零点为东点，右
为（λ，φ）。利用旋转矩阵写出这两个坐标系的坐标间的关系。

7．证明格林尼治平恒星时为

$$
\text{GMST} = 18^{h}.6973746 + 879000^{h}.0513369T
$$

其中T是从J2000.0起算以儒略世纪为单位的间隔。

8．证明太阳视中天的UT比表列的历书中天提前$\mu\Delta T$。

9．比较恒星时、真太阳时、平太阳时的异同，并说明它们间的

10．求出对应于B1992.1672和J1992.1672的儒略日期。

第一章 习 题

1．对球面三角形ABC，证明

$$da = \cos C db + \cos B dc + K \sin b \sin c dA$$

$$dA = -\cos c dB - \cos b dC + K^{-1} \sin B \sin C da$$

其中

$$K = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} 。$$

2．证明在等边球面三角形中，边和角满足下列条件

$$\sec A - \sec a = 1 。$$

3．证明北黄极的天顶距为

$$z = \cos^{-1}(\cos\varepsilon \sin\phi - \sin\varepsilon \cos\phi \sin T)$$

其中T是地方恒星时。

4．两颗恒星 A和B（赤纬分别为δ_1和δ_2）在同一瞬间升起，当 B 降落时，A在中天，证明

$$\tan\phi \tan\delta_1 = 1 - 2\tan^2\phi \tan^2\delta_2$$

其中ϕ为纬度。

5．旧银道坐标系北银极的赤道坐标为 $A = 12^h 40^m$，$D = +28°$（1900.0历元），采用银道与天赤道的升交点作为零点，利用旋转矩阵写出旧银道坐标和黄道坐标的关系。

6．地理坐标系的第一极为地球的北极，零经圈为通过第一极和格林尼治天文台的大圆，右旋坐标系；地面坐标系的第一极为该地的天顶，零点为东点，右旋坐标系。该地的经纬度为（λ，φ）。利用旋转矩阵写出这两个坐标系的坐标间的关系。

7．证明格林尼治平恒星时为

$$GMST = 18^h.6973746 + 879000^h.0513369T$$

其中T是从J2000.0起算以儒略世纪为单位的间隔。

8．证明太阳视中天的UT比表列的历书中天提前$\mu\Delta T$。

9．比较恒星时、真太阳时、平太阳时的异同，并说明它们间的关系。

10．求出对应于B1992.1672和J1992.1672的儒略日期。

第二章　地心坐标

第一节　大气折射近似公式

从天体到观测者的光线因通过地球的大气层而产生弯曲，称为大气折射效应。观测者用天文仪器直接测定的天体位置（已消除仪器误差的影响）受到大气折射效应的影响，因而观测者看到天体的方向与没有大气时不同，这个方向差称为大气折射（又称蒙气差）。天体的观测位置作了大气折射改正后，所得天体坐标称为站心坐标。

在上稀下密的地球大气层中，天体σ'发出的光因大气折射率的变化而逐渐弯曲，如图2.1，以致在M点的观测者看到天体在σ方向。假如z为天体的真天顶距，z_0为视天顶距，则角$\rho=z-z_0$就是大气折射。大气折射使天体向天顶方向偏折，对天体方位角没有影响。

大气折射的值与大气密度有关，而大气密度又随大气的温度、气压和湿度而变，因而大气折射的精确计算至今仍是一个尚未解决的问题。

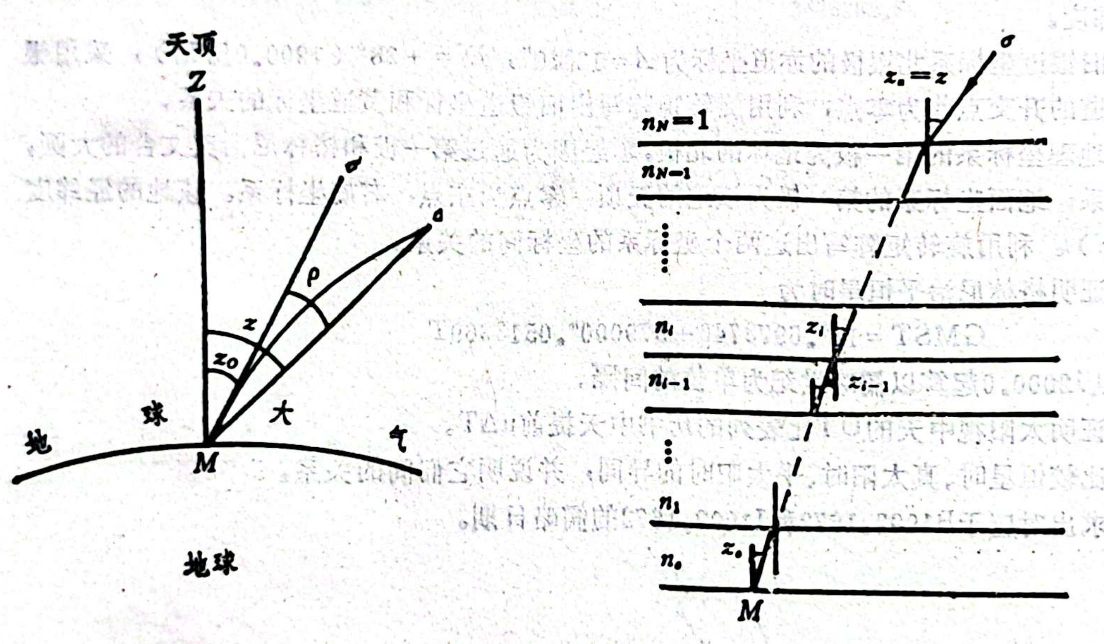


图2.1　大气折射　　　　图2.2　平面等密度大气层

现我们从最简单的情况出发来推测大气折射的近似公式。假定大气层是由N个不同的等密度层组成，考虑到大气层的厚度远较地球半径为小，所以可认为在观测地点附近各层大气为平行于地平的平行平面层。假设各平面层的大气折射率为n_0，n_1，…，n_{N-1}，如图2.2。n_0为地面那层的大气折射率，大气层外的折射率$n_N=1$。光线在各层间的入射角为z_0，z_1，…，z_{N-1}，z_N。z_0为天体的视天顶距，z_N为最外层的入射角，是天体的真天顶距。

对第 i 层和第 $i-1$ 层的交界面使用折射定律，得

$$n_i \sin z_i = n_{i-1} \sin z_{i-1} \tag{2.1}$$

这一关系式表示，在平行平面层中，折射率 n 与入射角 z 的正弦的乘积是常数。因此有

$$n_0 \sin z_0 = n_N \sin z_N = \sin z \tag{2.2}$$

如果大气折射率随高度作连续变化，(2.2) 式仍是正确的，并与大气层层数和各层厚度无关。z 是天体的站心天顶距。将 $z = z_0 + \rho$ 代入(2.2)式得

$$n_0 \sin z_0 = \sin z_0 \cos\rho + \cos z_0 \sin\rho \tag{2.3}$$

因为 ρ 是小量，有 $\cos\rho \simeq 1$，$\sin\rho \simeq \rho$，代入上式，得

$$\rho = R \tan z_0 \tag{2.4}$$

其中

$$R = (n_0 - 1) \tag{2.5}$$

称为大气折射常数。

由(2.4)式可知，在大气为平行平面层的假设下，大气折射仅与视天顶距 z_0 和地面处的大气折射率 n_0 有关。n_0 依赖于观测地面处的大气状况，当大气温度为0℃，气压为760毫米水银柱的标准状况时，$n_0 = 1.0002927$，将此值代入(2.5)式，得

$$R = 60''.4 \tag{2.6}$$

这也是 $z = 45°$ 处标准大气折射的数值。

对非标准状况，$n_0 - 1$ 正比于空气密度，根据格拉斯通(Gladstone)定律，(2.4)式可以表示为

$$\rho = 60''.4 \frac{(H/760)}{(1 + t/273)} \tan z_0 \tag{2.7}$$

其中 t 为大气摄氏温度，H 为以毫米水银柱计算的气压。

由于大气折射率与光的波长有关，大气折射也因光的颜色而异。上面给出的标准状况下的 n_0 值是对应于恒星的目视星等 V 的中心波长（约0.575微米）。不同光谱型的恒星有不同的大气折射，因而会在观测中引入与光谱型有关的误差。

考虑大气折射率随波长的变化，(2.7)式可以改写为

$$\rho = 21''.3 \frac{H(1 + 0.00567/\lambda^2)}{(273 + t)} \tan z_0 \tag{2.8}$$

其中 λ 为以微米为单位的波长。

(2.7)式或(2.8)式是大气折射的近似公式，并仅对天顶距不太大时适用。

在实际工作中，我们需要计算大气折射对天体赤道坐标的影响。考虑图2.3所示的天球。P 为北天极，Z 为天顶，σ' 为天体的站心位置，由于大气折射使天体向天顶方向偏折，天体的观测位置位移到 σ，有 $Z\sigma' = z$，$Z\sigma = z_0$，$\sigma\sigma' = z - z_0 = \rho$。显然天顶 Z 即引起恒星位移的某一固定点。天顶 Z 的赤道坐标为

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= S \\ \delta_0 &= \varphi \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

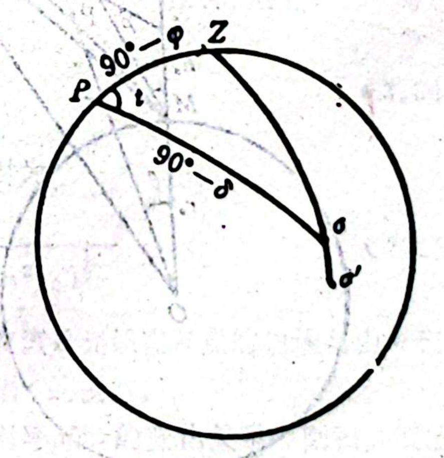


图2.3 大气折射对天体位置的影响

其中S为地方恒星时，φ为观测地点纬度。

由(1.26)式得

$$\sigma\sigma' = k\sin z_0 \tag{2.10}$$

而$\sigma\sigma' = \rho = R\tan z_0$，因此得

$$k = R\sec z_0 \tag{2.11}$$

将(2.9)和(2.11)式代入(1.27)式，得

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -R\sec z_0\cos\varphi\sec\delta\sin t \\ \delta' - \delta &= R\sec z_0(\cos\varphi\sin\delta\cos t - \sin\varphi\cos\delta) \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

其中t为恒星的时角。若要将上式右端的z_0消去，表示成φ，δ，t的函数，则可利用球面三角形$PZ\sigma$的余弦公式

$$\cos z_0 = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t \tag{2.13}$$

将(2.13)式代入(2.12)式，得

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\frac{R\sec^2\delta\sin t}{(\tan\varphi\tan\delta + \cos t)} \\ \delta' - \delta &= R\frac{(\tan\delta\cos t - \tan\varphi)}{(\tan\varphi\tan\delta + \cos t)} \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

上式就是大气折射影响天体赤经和赤纬的公式。

第二节　在径向对称大气中的大气折射

为了求得大气折射更准确的公式，把大气处理为径向对称，即大气密度和大气折射率仅是离地心距离的函数。

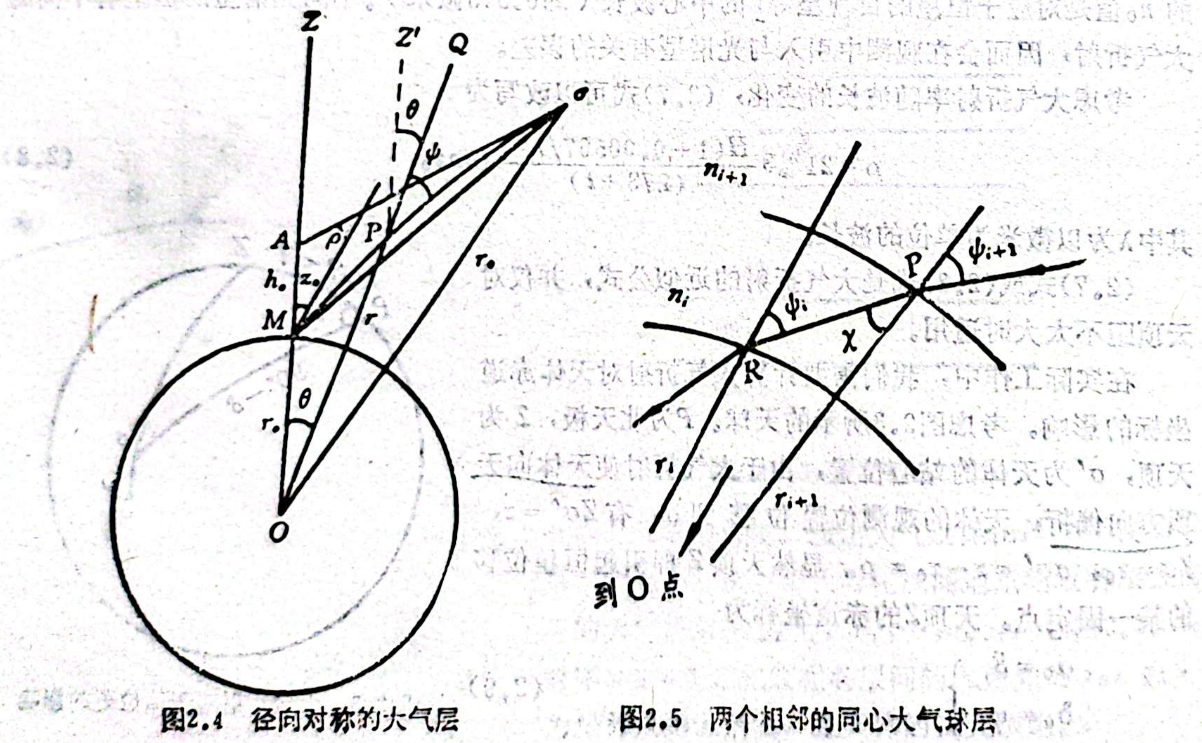


图2.4　径向对称的大气层　　　图2.5　两个相邻的同心大气球层

图2.4中，设O是中心，M表示地心距为r_0的观测者，MZ是观测者天顶的方向，P表示光线弯曲路径σM上的某一点。令$OP=r$，$\angle MOP=\theta$，则(r,θ)是P点的极坐标。PZ'平行于MZ。若z表示在P点处光线同PZ'相交的角，ψ表示光线同直线OPQ相交的角，则有

$$z=\psi+\theta \tag{2.15}$$

由于ψ是径向方向OPQ与光线$\theta=\theta(r)$的切线间的夹角，因此

$$\tan\psi=r\frac{d\theta}{dr} \tag{2.16}$$

由（2.15）和（2.16）式得

$$dz=d\psi+\frac{\tan\psi}{r}dr \tag{2.17}$$

设想大气是由无穷多的同心球层所组成。图 2.5给出两个相邻的第 i 和 $i+1$ 大气层。令$\angle RPO=\chi$，由折射定律可知

$$n_{i+1}\sin\psi_{i+1}=n_i\sin\chi \tag{2.18}$$

而在平面三角形RPO中按正弦定律有

$$r_{i+1}\sin\chi=r_i\sin\psi_i \tag{2.19}$$

由（2.18）和（2.19）式得

$$r_{i+1}n_{i+1}\sin\psi_{i+1}=r_in_i\sin\psi_i \tag{2.20}$$

这一关系式表示，在同心球层中球面边界半径r，折射率n与入射角ψ的正弦的乘积是常数。

根据这个关系式，有

$$rn\sin\psi=r_0n_0\sin z_0 \tag{2.21}$$

其中r_0为地球半径，n_0为地面空气层的折射率，z_0为视天顶距。在图 2.4 的 M 处，$\theta=0$，$\psi=z_0$

由（2.21）式，可得

$$\tan\psi=\frac{r_0n_0\sin z_0}{(r^2n^2-r_0^2n_0^2\sin^2z_0)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.22}$$

微分（2.21）式，得

$$rn\cos\psi(d\psi+\tan\psi dr/r)=-r\sin\psi dn \tag{2.23}$$

将上式代入（2.17）式，可得

$$dz=-\frac{\tan\psi}{n}dn \tag{2.24}$$

然后将（2.22）式代入上式进行积分，从而得到大气折射为

$$\rho=\int_M^\sigma dz=r_0n_0\sin z_0\int_1^{n_0}\frac{dn}{n(r^2n^2-r_0^2n_0^2\sin^2z_0)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.25}$$

上式是计算大气折射的精确公式。严格地讲，大气折射应该是光线在M点的切线与由M到天体σ直线间的交角ρ'，两者的差别仅仅是M点和A点对天体σ的视差。

（2.25）式中有两个变量n和r，如果能知道大气折射率n随r的变化关系，则积分就能被计算。但通常它们的精确关系式并不知道，只能采用一些与实际情况尽可能相符的假设和某

些数学方法以求出大气折射的展开式。

令

$$r = r_0 + h \tag{2.26}$$

将上式代入（2.25）式，当天体的天顶距不是非常大时，将r^2展开成$\left(\frac{h}{r_0}\right)$的幂级数，并仅保留零阶项和一阶项，则（2.25）式可写为

$$\rho = \rho_1 - \rho_2 + O(h^2/r_0^2) \tag{2.27}$$

其中

$$\rho_1 = n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.28}$$

$$\rho_2 = \frac{n_0 \sin z_0}{r_0} \int_1^{n_0} \frac{h n dn}{(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.29}$$

（2.28）式的积分可被求出

$$\rho_1 = \left[-\sin^{-1}\left(\frac{n_0 \sin z_0}{n}\right)\right]\Bigg|_1^{n_0} = \sin^{-1}(n_0 \sin z_0) - z_0 \tag{2.30}$$

上式也可写为

$$\sin(z_0 + \rho_1) = n_0 \sin z_0 \tag{2.31}$$

这同平行平面层求得的结果（2.2）式完全相同。若将ρ_1展开成（$n_0 - 1$）的幂级数，仅保留到二阶项，可得

$$\rho_1 = (n_0 - 1)\tan z_0 + \frac{1}{2}(n_0 - 1)^2 \tan^3 z_0 \tag{2.32}$$

在计算（2.29）式的积分时，通常用大气密度ρ代替大气折射率n，有

$$n = 1 + (n_0 - 1)\frac{\rho}{\rho_0} \tag{2.33}$$

其中ρ_0为地面处的大气密度。大气密度随高度增加而迅速减小，有$\rho \leqslant \rho_0$，若仅保留到一阶项，这样（2.29）式可写为

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{\tan z_0 \sec^2 z_0}{r_0} \quad \frac{(n_0 - 1)}{\rho_0} \int_0^{\rho_0} h d\rho \\ &= (n_0 - 1)\frac{H_0}{r_0} \tan z_0 \sec^2 z_0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

其中

$$H_0 = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\rho_0} h d\rho = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\infty} \rho dh \tag{2.35}$$

H_0等价于均质大气的高度，简称标高。

将（2.32）和（2.34）式合并在一起，得到大气折射ρ具有下列形式

$$\rho = A \tan z_0 + B \tan^3 z_0 + \cdots \tag{2.36}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A &= (n_0 - 1)(1 - H_0/r_0) \\ B &= -(n_0 - 1)(H_0/r_0 - \frac{1}{2}(n_0 - 1)) \end{aligned}\right\} \quad (2.37)$$

（2.36）式是大气折射通常采用的形式。系数A和B为经验确定的常数。由于折射常数随气温,气压,湿度和波长的变化等不同的假设，因而（2.37）式具有不同的形式。对大气的标准状况，（2.36）式成为

$$\rho = 60''.29\tan z_0 - 0''.06688\tan^3 z_0 \quad (2.38)$$

对大气密度ρ或大气折射率n已给定的径向分布，在得到大气折射的同时，还可求得光线的路径。由（2.16）和（2.22）式，得

$$\theta = r_0 n_0 \sin z_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'(r'n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.39)$$

一旦光线的路径已知，它的渐近线σA就能被确定，从而可计算出高度h_0。图2.4中，$MA = h_0$，$\angle ZA\sigma = z_0 + \rho$，$\sigma$为光线路径最上面的那点,那里的大气折射率$n = 1$，$O\sigma = r_\sigma$，$\angle A\sigma O = \psi_\sigma$，对平面三角形，应用正弦定理得

$$r_\sigma \sin\psi_\sigma = (r_0 + h_0)\sin(z_0 + \rho) \quad (2.40)$$

利用（2.21）式，上式变为

$$h_0 = r_0\left[\frac{n_0 \sin z_0}{\sin(z_0 + \rho)} - 1\right] \quad (2.41)$$

对天顶距不太大的天体，h_0很小，可以忽略。但对接近地平的天体，h_0迅速增加。h_0的意义为：当进行大气折射改正后，求得的站心坐标对应的并不是观测者本身的位置，而是观测者上面高度为h_0处的位置。由于h_0很小，仅仅对月球在接近地平时的观测才需要进行这项改正，另外对地球人造卫星的观测，这项改正也是重要的，而对所有其它的天体，这项改正都可忽略。

不同的研究者对大气物理性质随高度的变化作了不同的假设，从而导出了不同的计算大气折射的方法,这些方法所求得的大气折射在天顶距不大时,彼此符合得很好。为便于计算,已编有各种大气折射表，应用最广的是普尔科沃天文台所编的大气折射表（1870年初版）。根据观测的天顶距和观测时记录的气温和气压等，从大气折射表中可以查出大气折射值。

可以将（2.36）式改写为

$$\rho = g(A_1\tan z_0 + B_1\tan^3 z_0 + \cdots) = gN \quad (2.42)$$

其中g为原系数的公共因子，它随地面的大气折射率n_0而变，因而也是气温t和气压H的函数，即

$$g = f(t, H) \quad (2.43)$$

对于标准状况时的气温t_0和气压H_0来说，那时的大气折射为

$$\rho_0 = g_0 N \quad (2.44)$$

其中

$$g_0 = f(t_0, H_0) \quad (2.45)$$

ρ_0称为平均大气折射，由（2.42）和（2.44）式得

$$\rho = \frac{g}{g_0}\rho_0 \tag{2.46}$$

将（2.43）式在g_0处展为台劳级数，并仅取一阶量，得

$$g = g_0 + (t-t_0)\frac{\partial f}{\partial t} + (H-H_0)\frac{\partial f}{\partial H} \tag{2.47}$$

将（2.47）式代入（2.46）式，得

$$\rho = (1+A+B)\rho_0 \tag{2.48}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{t-t_0}{g_0}\frac{\partial f}{\partial t} \\ B &= \frac{H-H_0}{g_0}\frac{\partial f}{\partial H} \end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

（2.48）式就是编制大气折射表所使用的公式。

我国天文年历中刊有平均大气折射表和大气折射订正表。平均大气折射表以天顶距z_0为引数，可查出在标准状况下的ρ_0。订正表载有以气温t和气压H为引数的相应改正系数A和B。

由于观测处的气温、气压、湿度和光波波长等参数随时在变化，而且不易测准，所以计算得的大气折射仍含有一定的误差。此外大气结构还受地区性局部气象因素的影响，造成所谓的反常折射。除天顶距方向的折射外，还有水平方向的大气折射称为旁折射。所有这些情况使得大气折射成为阻碍光学天体测量仪器提高精度的重要因素之一。为了尽量削弱大气折射的影响，在天体测量的某些观测方法中都避免直接计算大气折射改正而只考虑较差改正，或者把观测天顶距限制在相当小的范围内。

上面讨论的大气折射是对光学波段。对射电波段的大气影响主要是在离地面约350公里高度的电离层引起的。在激光测月和激光测卫等工作中，大气折射使观测到的光行时与真空中的情况不同，所以必须从测距结果中扣除因大气折射所引起的光程影响。

第三节　观测者的地心坐标

在计算天体的地心位置时，必须知道观测者的地心坐标，因此有必要了解地球的形状和大小，并推导出计算地心坐标的公式。

地球的自然表面是相当复杂的，由于地球表面上有70%左右的地区是被海水覆盖着，因此通常研究的地球形状是指大地水准面。如果在一个曲面上各点的重力位（引力位与离心力位之和）相等，则这个曲面称为重力位水准面。所谓大地水准面就是与一个假想的静止海水面相重合的重力位水准面以及这个面向大陆底部延伸所形成的封闭曲面。大地水准面上各点的重力（铅垂线）方向就是它的法线方向。根据大地测量观测的结果，大地水准面的形状非常接近于旋转椭球体（一个椭圆绕其短轴所成的形状）。因此在大地测量中，以旋转椭球面代表地球的大地水准面，作为确定地面各点位置的参考，并把旋转椭球称为参考椭球。

参考椭球通常用半长轴a，扁率$f=\frac{a-b}{a}$来表征，其中b为半短轴。表2.1给出著名的几种测地参考椭球。

在参考椭球上可以建立球面坐标系和直角坐标系，通常选取第一极为地球的平均自转极，

表2.1　参考椭球的形状参数

参　考　椭　球	a（米）	$1/f$
克拉索夫斯基(1942)	6378245	298.3
IAU 1964	6378160	298.25
GRS67(IUGG1967)	6378160	298.247167
IAU 1976	6378140	298.257
GRS80(IUGG1980)	6378137	298.257222101
MERIT 1983	6378137	298.257
WGS84(IAG1984)	6378137	298.257223563
IERS 1992	6378136.3	298.257

零经圈很接近格林尼治子午圈。图2.6表示参考椭球的子午截面，其中O为地心，X'轴在赤道上，Y'轴指向北极，椭圆的半长轴为a，扁率为f，故椭圆方程为

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2(1-f)^2}=1 \tag{2.50}$$

考虑一观测者M位于参考椭球上高度为h处，h可认为是该处与海平面的高度差。通过M画参考椭球的法线同椭球相交于M'点，则$MM'=h$。观测者M的纬度因天顶方向定义的不同，有三种计量方法：

（1）将地心O和M相连并延长，给出了地心天顶，相应的纬度即OM和OX'轴的交角φ'，称为地心纬度。

（2）通过M点的参考椭球的法线，同X'轴相交于N，NM方向定义了测地天顶，相应的纬度即NM和OX'轴的交角φ，称为测地纬度。

（3）通过M点的铅垂线定义了天文天顶，

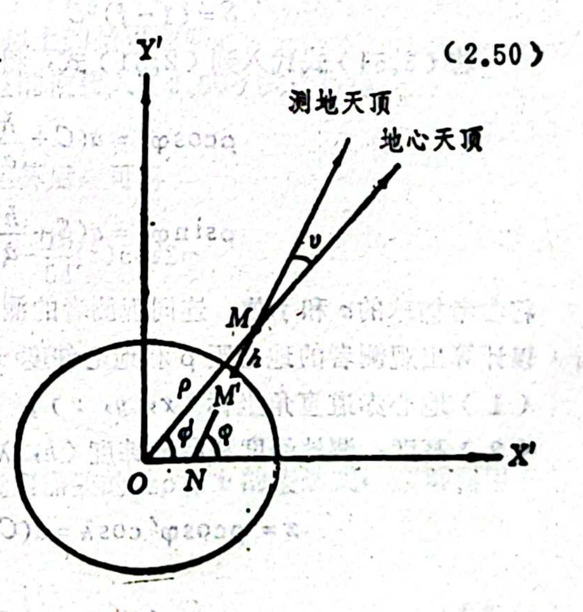
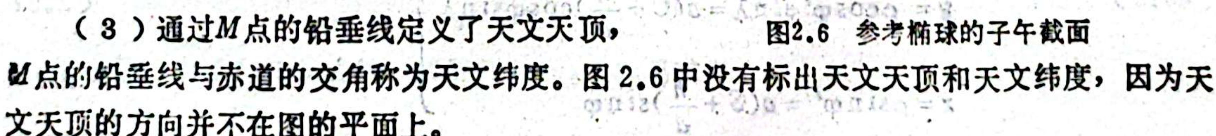


图2.6　参考椭球的子午截面


M点的铅垂线与赤道的交角称为天文纬度。图2.6中没有标出天文天顶和天文纬度，因为天文天顶的方向并不在图的平面上。

由于地球内部物质分布的不均匀，M点的铅垂线与对应的法线MN并不一致，它们之间的差异，也就是M点天文纬度与测地纬度之差，称为垂线偏差，其大小随地而异，有时可达数个角秒。测地纬度和地心纬度之间的差称为垂线角。观测者的经度是观测者的子午圈与格林

尼治子午圈构成的角度。容易看出地心经度和测地经度是相同的，通常用λ表示。天文纬度和天文经度虽然可以直接实现，但并不适合大地测量的用途。

令观测者的地心距$OM=\rho$，ρ同观测者的地心纬度φ′、地心经度λ一起给出了观测者相对地心的位置。设M点的直角坐标为(x_0', y_0')，M点的直角坐标为(x', y')，则有

$$\left.\begin{aligned}\rho=\cos\varphi'=x_0'=x'+h\cos\varphi\\ \rho=\sin\varphi'=y_0'=y'+h\sin\varphi\end{aligned}\right\}\tag{2.51}$$

M'点是在（2.50）式给出的椭圆上，对（2.50）式求导，并考虑到椭圆在M'点的法线的斜率为$\tan\varphi=-\dfrac{dx'}{dy'}$，得

$$y'=x'(1-f)^2\tan\varphi\tag{2.52}$$

将上式代回到（2.50）式，得

$$x'^2[1+(1-f)^2\tan\varphi]=a^2\tag{2.53}$$

（2.52）和（2.53）式可改写为下列形式

$$\left.\begin{aligned}x'=aC\cos\varphi\\ y'=aS\sin\varphi\end{aligned}\right\}\tag{2.54}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}C=[\cos^2\varphi+(1-f)^2\sin^2\varphi]^{-\frac{1}{2}}\\ S=(1-f)^2C\end{aligned}\right\}\tag{2.55}$$

将（2.54）式代入到（2.51）式，得

$$\left.\begin{aligned}\rho\cos\varphi'=a\left(C+\frac{h}{a}\right)\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi'=a\left(S+\frac{h}{a}\right)\sin\varphi\end{aligned}\right\}\tag{2.56}$$

将参考椭球的a和f值，连同观测者的测地纬度φ和高度h代入（2.55）和（2.56）式，就可以计算出观测者的地心距ρ和地心纬度φ′。显然，观测者M的位置可用三种方式表示：（1）地心赤道直角坐标(x, y, z)；（2）地心距，地心经度和地心纬度$(\rho, \lambda, \varphi')$；（3）高度，测地经度和测地纬度$(h, \lambda, \varphi)$，它们之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}x=\rho\cos\varphi'\cos\lambda=a\left(C+\frac{h}{a}\right)\cos\varphi\cos\lambda\\ y=\rho\cos\varphi'\sin\lambda=a\left(C+\frac{h}{a}\right)\cos\varphi\sin\lambda\\ z=\rho\sin\varphi'=a\left(S+\frac{h}{a}\right)\sin\varphi\end{aligned}\right\}\tag{2.57}$$

我国的天文年历根据IAU1976参考椭球的$f=1/298.257$，按照不同纬度计算了相应的C和S，列成“地心坐标计算表”，因此C和S可根据测地纬度φ直接在表中查出。

在实际的工作中，有时需要地心距ρ和垂线角$v=\varphi-\varphi'$的直接表达式。图2.7为图2.6中

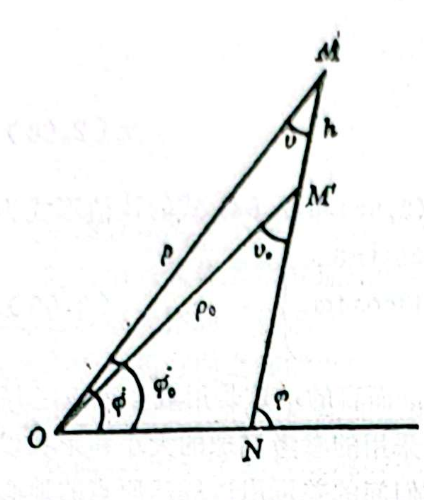


图2.7 三角形OMN的放大图

三角形OMN的放大图。M'点在椭球上，有$h=0$。令$OM'=\rho_0$，$\angle OM'N=v_0$，M'的地心纬度为$\angle M'ON=\varphi'_0$。由（2.56）式得

$$\tan\varphi'_0=\frac{S}{C}\tan\varphi=(1-f)^2\tan\varphi \tag{2.58}$$

因为$v_0=\varphi-\varphi'_0$，有

$$\tan v_0=\frac{\tan\varphi-\tan\varphi'_0}{1+\tan\varphi\tan\varphi'_0} \tag{2.59}$$

将（2.58）式代入上式，经简单的运算后，得

$$\tan v_0=\frac{q\sin 2\varphi}{1+q\cos 2\varphi} \tag{2.60}$$

其中

$$q=\frac{2f-f^2}{1+(1-f)^2} \tag{2.61}$$

因为v_0和q是小量，（2.60）式可以展开成

$$v_0=q\sin 2\varphi-\frac{1}{2}q^2\sin 4\varphi+\frac{1}{3}q^3\sin 6\varphi\cdots \tag{2.62}$$

q约为300分之一的量级，因而级数展开式中三阶以上的量可忽略。

对ρ_0可求得类似的级数表达式。将M'点对应的值代入（2.56）式，可得

$$\rho_0^2=a^2C^2(\cos^2\varphi+(1-f)^4\sin^2\varphi) \tag{2.63}$$

将（2.55）式的C的表达式代入上式，经简单的运算后，可得

$$\rho_0=a[1-\frac{1}{2}f+\frac{5}{16}f^2+\frac{5}{32}f^3+(\frac{1}{2}f-\frac{13}{64}f^3)\cos 2\varphi$$
$$-(\frac{5}{16}f^2+\frac{5}{32}f^3)\cos 4\varphi+\frac{13}{64}f^3\cos 6\varphi\cdots] \tag{2.64}$$

上式级数展开式中三阶以上的项被忽略。

（2.62）和（2.64）式是对应于M'点的，我们需要的是ρ和v的表达式，这可利用三角形MOM'来联系，由正弦定律和余弦定律得

$$\left.\begin{aligned}\rho^2&=\rho_0^2+h^2+2\rho_0 h\sin v_0\\ \rho\sin v&=\rho_0\sin v_0\end{aligned}\right\} \tag{2.65}$$

v_0是小量，由（2.65）式第一式展开$\cos v_0$，容易求得

$$\rho=(\rho_0+h)[1-\frac{1}{2}\rho_0 h v_0^2(\rho_0+h)^{-2}+\cdots] \tag{2.66}$$

由于(h/a)比f小得多，若ρ精确到1厘米，则（2.66）可简写为

$$\rho=\rho_0+h \tag{2.67}$$

同样由（2.65）式第二式，若v精确到0".001，可得

$$v=(1-\frac{h}{a})v_0 \tag{2.68}$$

采用IAU1976参考椭球按表2.1的数据，可以求得(2.62)和(2.64)式的数值形式为

$$\left.\begin{aligned}v_0&=692''.7260\sin2\varphi-1''.1632\sin4\varphi+0''.0026\sin6\varphi\\ \rho_0&=6367.470098+10.692297\cos2\varphi-0.022443\cos4\varphi\\ &\quad+0.000049\cos6\varphi\text{（公里）}\end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

实用上测地坐标（h，λ，φ）是相对于该区域的测地基准而言的，这是用近似于该区域大地水准面的旋转椭球来表示，因此区域性的测地基准由所采用的参考椭球的大小和形状以及原点坐标所确定。通常该椭球的原点并不和地心重合，它们间的差可用该椭球原点的地心直角坐标（x_0，y_0，z_0）表示。因此由测地坐标（h，λ，φ）归算到相对于地球参考系的地心直角坐标，可使用下面的表达式

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+a(C+\frac{h}{a})\cos\varphi\cos\lambda\\ y&=y_0+a(C+\frac{h}{a})\cos\varphi\sin\lambda\\ z&=z_0+a(S+\frac{h}{a})\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{2.70}$$

测地坐标（h，λ，φ）也可相对全球参考系，但由不同的空间测量技术求得的全球参考系稍有不同。从一个全球参考系（O'-$X'Y'Z'$）到另一个全球参考系（O-XYZ）的转换关系可写为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}+(1+\delta s)R_X(\delta\varepsilon)R_Y(\delta\psi)R_Z(\delta\omega)\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \tag{2.71}$$

其中（Δx，Δy，Δz）为参考系（O'-$X'Y'Z'$）的原点O'在参考系（O-XYZ）中的坐标，$\delta\varepsilon$、$\delta\psi$、$\delta\omega$分别为绕着X、Y、Z轴的旋转量，δs为尺度的变化。

有时需要由地心直角坐标（x，y，z）计算测地坐标（h，λ，φ），利用（2.57）式不难得到

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\tan^{-1}(y/x)\\ \varphi&=\tan^{-1}\left[\frac{z(1-f)+e^2a\sin^3\mu}{(1-f)(p-e^2a\cos^3\mu)}\right]\\ h&=p\cos\varphi+z\sin\varphi-a(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{2.72}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}e^2&=2f-f^2\\ p&=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\\ r&=(p^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\\ \mu&=\tan^{-1}\left\{\frac{z}{p}\left[(1-f)+\frac{e^2a}{r}\right]\right\}\end{aligned}\right\} \tag{2.73}$$

第四节　地心视差

观测者在两个不同位置看到同一天体的方向之差称为视差。

对太阳系天体通常取地球中心（简称地心）为标准点。由于地球自转或天体的周日视运动，地面上某点观测到的天体方向和从地心看到的方向之间的差别叫做地心视差或周日视差。地心视差也可以认为是站心坐标和地心坐标之差。

在图2.8中，O 点代表地心，M 点为观测者在地面的位置，OMZ' 为观测者的地心天顶的方向，σ 是一个天体，ρ 为观测者至地心的距离，r 和 r' 分别为天体到地心和观测者的距离，$z=\angle Z'O\sigma$，$z'=\angle Z'M\sigma$，$p=\angle M\sigma O$，因此对于O，M 两点，天体σ的方向差为

$$z'-z=p \tag{2.74}$$

即在M点所测得的地心天顶距要比在地心O所测得的天顶距增加角度p，p即该天体的地心视差。因此一个天体的地心视差，等于该天体对地心和观测点间的直线所张的角。由图看出地心视差并不改变天体的方位角。

图2.8　地心视差

在三角形$OM\sigma$中，根据正弦定律有

$$\sin p=\frac{\rho}{r}\sin z'=\frac{\rho}{r'}\sin z \tag{2.75}$$

由上式可知，地心视差p随天体距离r（或r'）的增大而减小，一般太阳系天体的r和r'都远大于ρ，所以地心视差为小量。恒星距地球更要远得多，以致所有恒星的地心视差都小到可以忽略不计，因此可以认为恒星的站心坐标和地心坐标相同。

地心视差p的值还依赖于天体的天顶距和观测者的地心距，当$\rho=a$，$z'=90°$时即对赤道上的观测者天体位在地平圈上时，p达到其最大值p_0，p_0称为该天体的赤道地平视差，简称地平视差，有

$$\sin p_0=\frac{a}{r} \tag{2.76}$$

地平视差是天体对地球赤道半径所张的角度。由于a为常数，p_0只与天体的地心距离r有关，所以常用p_0来表示太阳系天体的地心距离r。在天文历表中列出了太阳、月亮和行星的逐日地平视差值。此外，在IAU 1976 天文常数系统中运用太阳视差表示太阳至地心相差1天文单位的距离，记为$\pi_\odot$，$\pi_\odot$的定义与地平视差p_0类似，

$$\sin\pi_\odot=\frac{a}{A} \tag{2.77}$$

但是这里的A不是任意时刻太阳至地心的距离，而是一个天文单位的距离。

由（2.76）和（2.77）式可得到计算太阳系天体的地平视差p_0的表达式

$$p_0 = \pi_{\odot} A/r = 8''.794148/r \tag{2.78}$$

其中 r 用天文单位表示。

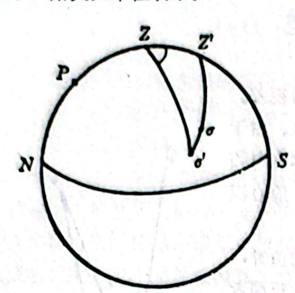


图2.9　在天球上的地心视差位移

考虑图 2.9 所示的站心天球，P 为北天极，由第二章第三节知观测者M有两种纬度，即地心纬度φ'和测地纬度φ，相应地在站心天球上有两个天顶，其中Z'称为观测者的地心天顶，Z称为观测者的测地天顶。Z'，Z和北天极P应在同一大圆上，并有$ZZ' = \varphi - \varphi'$。在计算视差影响时通常不考虑垂线偏差的因素，所以测地天顶Z可认为就是观测者的天文天顶。

若原先观测者在图2.8中地心O观测，后来位移到M点观测，位移方向在天球上的投影即地心天顶Z'称为向点（若位移方向相反，则向点在地心天底）。σ'和σ分别为观测者M和地心O所看到的天体位置。显而易见，向点Z'和视差位移$\sigma\sigma'$，是在同一大圆上，且视差位移发生在这大圆上从σ起背离向点的方向。

根据图2.9，以大圆弧表示相应的角度，则由（2.75）和（2.76）式得

$$\sin p = \sin\sigma\sigma' = \frac{\rho}{r}\sin Z'\sigma' = \frac{\rho}{a}\sin p_0 \sin Z'\sigma' \tag{2.79}$$

在球面三角形$ZZ'\sigma'$中，已知$ZZ' = \varphi - \varphi'$、$Z\sigma'$和$\angle Z'Z\sigma'$，其中$Z\sigma$和$\angle Z'Z\sigma'$分别为在观测者M处所测得的天体σ'的天顶距和方位角，它们是对应于天文天顶Z。由此可利用余弦公式解得$Z'\sigma'$，将$Z'\sigma'$、$\frac{\rho}{a}$和p_0等代入（2.79）式就可以计算出p值。

在实际工作中常需要计算地心视差对天体坐标的影响。可以利用第一章第一节给出的恒星在天球上的位移公式。显然地心天顶Z'即图1.3中的A点。地心天顶Z'的赤道坐标为

$$\alpha_0 = S, \qquad \delta_0 = \varphi' \tag{2.80}$$

其中S为地方恒星时。

由（1.26）和（2.79）式可得

$$k = \frac{\rho}{r} \tag{2.81}$$

将（2.80）和（2.81）式代入（1.27）式，得

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\frac{\rho}{r}\cos\varphi' \sin t \sec\delta \\ \delta' - \delta &= \frac{\rho}{r}(\cos\varphi' \cos t \sin\delta - \sin\varphi' \cos\delta) \end{aligned}\right\} \tag{2.82}$$

其中 t 为天体的时角。上式仅精确到$\frac{\rho}{r}$的一阶小量，可以用来计算地心视差对太阳和行星赤道坐标的影响。

月球离地球较近，视差值比较大，其赤道地平视差平均约 1°，因此需要用较精确的公式。在图2.8中，令$\vec{r}$和$\vec{\rho}$分别为天体σ和观测者M的地心位置矢量，则天体σ的站心位置

矢量$\overrightarrow{M\sigma}$可表示为

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\rho}$$

其中

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{cosec}\,p_0 \cos\delta\cos\alpha \\ a\,\mathrm{cosec}\,p_0 \cos\delta\sin\alpha \\ a\,\mathrm{cosec}\,p_0 \sin\delta \end{pmatrix}$$

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi' \cos S \\ \rho\cos\varphi' \sin S \\ \rho\sin\varphi' \end{pmatrix}$$

α和δ为天体的地心赤道坐标，p_0为天体的地平视差，ρ和φ'分别
心纬度，a为地球的半长轴，S为观测瞬间的地方恒星时。若天体的
y'，z'表示，则（2.83）式可写为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'\cos\delta'\cos\alpha' \\ r'\cos\delta'\sin\alpha' \\ r'\sin\delta' \end{pmatrix} = a\,\mathrm{cosec}\,p_0 \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} - \rho$$

只要知道上式右端的各量，从而可得天体的站心三维球面坐标

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \tan^{-1}(y'/x') \\ \delta' &= \tan^{-1}[z'/(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}] \\ r' &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}$$

由（2.86）式的三个式子可推导出直接计算$\alpha' - \alpha$和$\delta' - \delta$的表

$$\left.\begin{aligned} \tan(\alpha' - \alpha) &= \frac{-\frac{\rho}{a}\cos\varphi' \sin p_0 \sin t}{1 - \frac{\rho}{a}\cos\varphi' \sin p_0 \sec\delta\cos t} \\ \tan(\delta' - \delta) &= \frac{-\frac{\rho}{a}\beta\sin p_0 \sin(\gamma - \delta)}{1 - \frac{\rho}{a}\beta\sin p_0 \cos(\gamma - \delta)} \end{aligned}\right\}$$

其中 t 为天体的时角，β和γ为辅助量，且$\beta > 0$，有

$$\left.\begin{aligned} \beta\sin\gamma &= \sin\varphi' \\ \beta\cos\gamma &= \cos\varphi' \frac{\cos[S - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)} \end{aligned}\right\}$$

若令$\vec{S}'$，$\vec{S}$和$\vec{S}_0$分别表示$\vec{r}'$，$\vec{r}$和$\vec{\rho}$方向的单位矢量，则由（1.3
适用于任何坐标系的周日视差对天体坐标影响的公式

$$\vec{S}' - \vec{S} = \left(\frac{\rho}{r}\right)\vec{S} \times (\vec{S} \times \vec{S}_0)$$

若采用赤道坐标系，有

$$\vec{S}' - \vec{S} = d\vec{S} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\delta\cos\alpha d\delta - \cos\delta\sin\alpha d\alpha \\ -\sin\delta\sin\alpha d\delta + \cos\delta\cos\alpha d\alpha \\ \cos\delta d\delta \end{pmatrix}$$

矢量$\overrightarrow{M\sigma}$可表示为

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\rho} \tag{2.83}$$

其中

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\operatorname{cosec}p_0 \cos\delta \cos\alpha \\ a\operatorname{cosec}p_0 \cos\delta \sin\alpha \\ a\operatorname{cosec}p_0 \sin\delta \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi' \cos S \\ \rho\cos\varphi' \sin S \\ \rho\sin\varphi' \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

α和 δ 为天体的地心赤道坐标，p_0为天体的地平视差，ρ和φ'分别为观测者M的地心距和地心纬度，a为地球的半长轴，S为观测瞬间的地方恒星时。若天体的站心赤道直角坐标用x'，y'，z'表示，则（2.83）式可写为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'\cos\delta'\cos\alpha' \\ r'\cos\delta'\sin\alpha' \\ r'\sin\delta' \end{pmatrix} = a\operatorname{cosec}p_0 \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi'\cos S \\ \cos\varphi'\sin S \\ \sin\varphi' \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

只要知道上式右端的各量，从而可得天体的站心三维球面坐标

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \tan^{-1}(y'/x') \\ \delta' &= \tan^{-1}[z'/(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}] \\ r' &= (x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{2.87}$$

由（2.86）式的三个式子可推导出直接计算$\alpha'-\alpha$和$\delta'-\delta$的表达式，容易求得

$$\left.\begin{aligned} \tan(\alpha'-\alpha) &= \frac{-\frac{\rho}{a}\cos\varphi'\sin p_0 \sin t}{1-\frac{\rho}{a}\cos\varphi'\sin p_0 \sec\delta\cos t} \\ \tan(\delta'-\delta) &= \frac{-\frac{\rho}{a}\beta\sin p_0 \sin(\gamma-\delta)}{1-\frac{\rho}{a}\beta\sin p_0\cos(\gamma-\delta)} \end{aligned}\right\} \tag{2.88}$$

其中t为天体的时角，β和γ为辅助量，且$\beta>0$，有

$$\left.\begin{aligned} \beta\sin\gamma &= \sin\varphi' \\ \beta\cos\gamma &= \cos\varphi' \frac{\cos[S-\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)} \end{aligned}\right\} \tag{2.89}$$

若令$\vec{S}'$，$\vec{S}$和$\vec{S}_0$分别表示$\vec{r}'$，$\vec{r}$和$\vec{\rho}$方向的单位矢量，则由（1.32）和（2.81）式可得适用于任何坐标系的周日视差对天体坐标影响的公式

$$\vec{S}' - \vec{S} = \left(\frac{\rho}{r}\right)\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{S}_0) \tag{2.90}$$

若采用赤道坐标系，有

$$\vec{S}' - \vec{S} = d\vec{S} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\delta\cos\alpha d\delta - \cos\delta\sin\alpha d\alpha \\ -\sin\delta\sin\alpha d\delta + \cos\delta\cos\alpha d\alpha \\ \cos\delta d\delta \end{pmatrix} \tag{2.91}$$

将$\vec{S}$和$\vec{S}_0$在赤道坐标系的形式代入（2.90）式，然后和（2.91）式一起可得到和（2.82）式相同的表达式。

第五节 周日光行差

从地心坐标到站心坐标的转换中，除进行地心视差改正外，还需要进行另一个改正，即周日光行差改正。

运动中的观测者所观测到的天体方向与观测者静止时在同一瞬间所观测到的同一天体的方向是不同的，这个方向之差称为光行差。

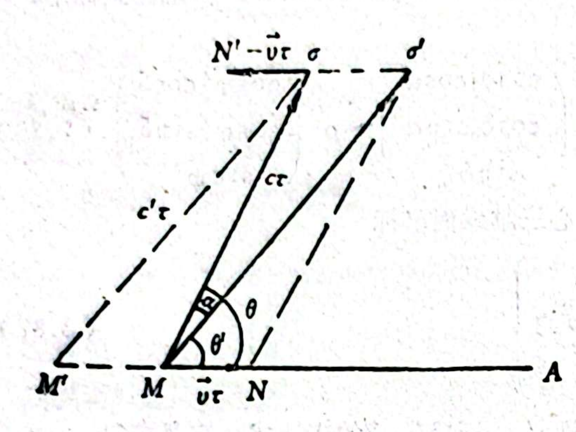


图2.10 光行差的起因

在图2.10中，设观测者M在t时观测天体σ，若观测者静止不动，则所见天体在$M\sigma$方向。令τ为光从天体σ到观测者M所化的时间（又称光行时），则天体σ到观测者M的距离为$c\tau$，其中c为光速。如果观测者以速度v沿MA方向运动，那么在τ时间内，一方面天体发出的光线以光速c经过σM距离到达观测者，另一方面，根据相对运动原理，可以认为天体相对观测者沿着与观测者运动方向相反的方向位移了$\overrightarrow{\sigma N'}=-\vec{v}\tau$，这两种运动的合成使得观测者实际看到的天体的方向是$M\sigma'$（$M\sigma' \parallel M'\sigma$）。显然$\sigma'$相对于观测者的距离应为$\sigma M'=c'\tau$，其中$c'$为光相对于观测者的速度，它的大小不等于$c$。$M\sigma$是观测者静止时所见天体的方向，它是天体的真方向，$M\sigma'$为观测者在运动中所见天体的方向，它是天体的视方向，两个方向之差α叫做光行差。令$\angle\sigma MA=\theta$，$\angle\sigma' MA=\theta'$，在三角形$\sigma M\sigma'$中根据正弦定律，有

$$\sin\alpha=\frac{v}{c}\sin\theta' \tag{2.92}$$

因v比c远小得多，所以α是小量。如略去二级以上小量，则有

$$\alpha=\frac{v}{c}\sin\theta \tag{2.93}$$

由上式可知，产生光行差的原因有二：（1）观测者以一定的速度在运动；（2）光速是有限值。

观测者随地球自转而作周日运动，这种运动引起的光行差称为周日光行差。对地心纬度为φ'的观测者M，其周日运动的速度ω和赤道上的点是相同的，但线速度v与赤道上点的v_0不等，有

$$v=\rho\omega\cos\varphi'=\frac{\rho}{a}v_0\cos\varphi' \tag{2.94}$$

地球赤道上的自转线速度v_0仅是光速的1.6×10^{-6}倍，因而周日光行差改正的影响很小，通

常只需进行一阶经典处理就足够了，可以不必考虑相对论的改正。

将图2.10投影到站心天球上。在图2.11中，P为北天极，Z为天顶，地球自西向东自转，观测者的运动方向MA总是指向天球上的东点。东点E称为周日光行差的向点。在周日光行差的影响下，天体的真位置σ将沿通过天体和东点的大圆σE向东点位移$\sigma\sigma'$。σ'为天体的视位置。由（2.93）式可得

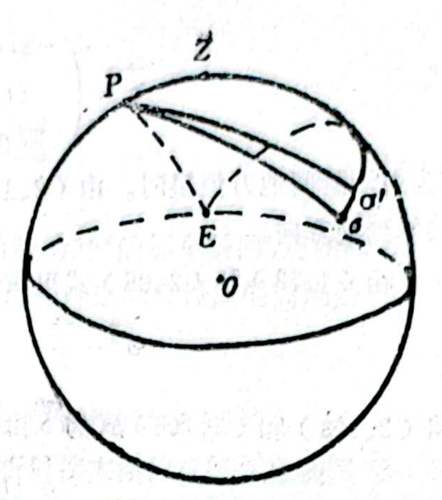


图2.11 周日光行差对天体位置的影响

$$\sigma\sigma' = \frac{v}{c}\sin\sigma E \qquad (2.95)$$

由上式和（1.26）式可得

$$k = -\frac{v}{c} = -\frac{\rho\omega}{c}\cos\varphi' \qquad (2.96)$$

东点E即图1.3中的A点。东点E的赤道坐标为

$$\alpha_0 = 90° + S,\ \delta_0 = 0° \qquad (2.97)$$

其中S为地方恒星时。

将（2.96）和（2.97）式代入（1.27）式，得

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \frac{\rho}{a}K'\cos\varphi'\cos t\sec\delta \\ \delta' - \delta &= \frac{\rho}{a}K'\cos\varphi'\sin t\sin\delta \end{aligned}\right\} \qquad (2.98)$$

其中t为天体的时角，$K' = \frac{v_0}{c}$称为周日光行差常数。上式就是周日光行差对天体赤道坐标影响的公式。周日光行差对恒星位置改正的影响很小，通常可用天文纬度φ来代替（2.98）式中的地心纬度φ'，并可令$\rho = a$，于是有

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= 0^s.0213\cos\varphi\cos t\sec\delta \\ \delta' - \delta &= 0''.320\cos\varphi\sin t\sin\delta \end{aligned}\right\} \qquad (2.99)$$

计算周日光行差的影响也可用矢量公式。根据图2.10，有

$$\overrightarrow{M\sigma'} = \overrightarrow{M\sigma} + \vec{v}\tau \qquad (2.100)$$

以观测者M为原点建立赤道直角坐标系。若用$\vec{S^*}$，$\vec{S}$和$\vec{n}$分别表示$\overrightarrow{M\sigma'}$，$\overrightarrow{M\sigma}$和$\vec{v}$的单位矢量，有

$$M\sigma'\cdot\vec{S^*} = M\sigma\cdot\vec{S} + v\tau\vec{n} \qquad (2.101)$$

将$M\sigma' = c'\tau$，$M\sigma = c\tau$代入上式，得

$$c'\vec{S^*} = c\vec{S} + v\vec{n} \qquad (2.102)$$

其中

$$\vec{S^*} = \begin{pmatrix} \cos\delta'\cos\alpha' \\ \cos\delta'\sin\alpha' \\ \sin\delta' \end{pmatrix},\quad \vec{S} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \qquad (2.103)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin S \\ \cos S \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.104}$$

S为观测瞬间地方恒星时。由（2.102）式，只要知道观测者[illegible]速[illegible]，就可以将天体的真方向归算到视方向。

由（1.32）和（2.96）式可求得视位置和真位置差异的矢量公式

$$\vec{S^*} - \vec{S} = -\frac{v}{c}\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{n}) \tag{2.105}$$

将（2.103）和（2.104）式的$\vec{S}$和$\vec{n}$代入上式可得到和（2.98）式相同的表达式。

第二章　习　　题

1．理论上的日没定义为太阳圆面中心的站心天顶距为90°
为太阳上边缘消失的瞬间，证明在纬度φ处，观测的日没和理论

$$\Delta t = 3\frac{1}{3}^{m}(\cos^2\varphi - \sin^2\delta)^{-\frac{1}{2}}$$

其中δ是太阳的赤纬。太阳圆面半径为16′，在地平时大气折射

2．若大气折射公式为$\rho = R\tan z_0$，证明因大气折射使太
率为

$$f = \frac{R\tan^2 z}{1-R}$$

其中z是太阳中心的站心天顶距。

3．若大气折射公式为$\rho = R\tan z_0$，求出大气折射率n随r
射率n_0已知，求出R和r_{n+1}。

4．设地球为球形，若某天体的地平视差p_0很小，因此sin
处看到该天体的视周日路径是小圆，该小圆的极比北天极的高
纬为$90° - \delta + p_0\sin\varphi\cos\delta$。

5．导出地心视差对天体到观测者的距离的影响公式。

6．设地球为球形，地球上A、B两地构成一基线，它们的
（λ_B, φ_B），矢量$\vec{AB}$在天球上的投影为Q点，试求当格林尼治
纬δ。

7．证明
$$\tan v = \frac{e^2\sin 2\varphi}{2(1-e^2\sin^2\varphi)}$$

8．设地心和月球中心间的距离不变，月球地平视差为p_0，
于31′，则月球在下落时的角直径为多少？

9．导出周日光行差对地平坐标影响的计算公式dA和dz。

10．求证：对于在纬度φ处的观测者而言，所有恒星在周日
$\frac{2\pi a}{c}\cos\varphi$的椭圆，式中$a$是地球半径，$c$是光速。

第二章　习　　题

1．理论上的日没定义为太阳圆面中心的站心天顶距为90°的那个瞬间，观测的日没定义为太阳上边缘消失的瞬间，证明在纬度φ处，观测的日没和理论的日没间的间隔是

$$\Delta t = 3\frac{1}{3}^{m}(\cos^2\varphi - \sin^2\delta)^{-\frac{1}{2}}$$

其中δ是太阳的赤纬。太阳圆面半径为16′，在地平时大气折射的影响为34′。

2．若大气折射公式为 $\rho = R\tan z_0$，证明因大气折射使太阳的视圆面呈椭园形，其扁率为

$$f = \frac{R\tan^2 z}{1-R}$$

其中 z 是太阳中心的站心天顶距。

3．若大气折射公式为 $\rho = R\tan z_0$，求出大气折射率 n 随 r 的变化关系，若地面的大气折射率 n_0 已知，求出 R 和 r_{n+1}。

4．设地球为球形，若某天体的地平视差 p_0 很小，因此 $\sin^2 p_0$ 可被忽略，证明在纬度 φ 处看到该天体的视周日路径是小圆，该小圆的极比北天极的高度小 $p_0\cos\varphi\sin\delta$，小圆的余纬为 $90° - \delta + p_0\sin\varphi\cos\delta$。

5．导出地心视差对天体到观测者的距离的影响公式。

6．设地球为球形，地球上 A、B 两地构成一基线，它们的经纬度分别为（λ_A，φ_A）和（λ_B，φ_B），矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在天球上的投影为 Q 点，试求当格林尼治恒星时为 S 时 Q 点的赤经 α 和赤纬δ。

7．证明
$$\tan v = \frac{e^2\sin 2\varphi}{2(1-e^2\sin^2\varphi)}$$

8．设地心和月球中心间的距离不变，月球地平视差为 p_0，若月球在天顶时的角直径等于31′，则月球在下落时的角直径为多少？

9．导出周日光行差对地平坐标影响的计算公式 dA 和 dz。

10．求证：对于在纬度φ处的观测者而言，所有恒星在周日光行差影响上都画出半长轴为 $\frac{2\pi a}{c}\cos\varphi$ 的椭圆，式中 a 是地球半径，c 是光速。

第三章　日心或太阳系质心坐标

第一节　地球的绕日运动

从天体的日心或太阳系质心坐标到地心坐标的变换涉及到周年视差改正和周年光行差改正。周年视差改正需要地球的质心位置矢量，周年光行差改正需要地球的质心速度矢量。要计算周年视差改正和周年光行差改正，必须先了解地球的绕日运动，并推导出计算地球的质心位置矢量和质心速度矢量的公式。

行星绕太阳运动的轨道通常可用六个轨道根数来描述，这六个轨道根数是：a，e，i，Ω，ω，τ；其中 a 为轨道的半长径，e 为轨道的偏心率，i 为行星轨道面对黄道面的倾角，Ω 为轨道升交点黄经，ω 为从轨道升交点起量的近日点的角距，τ 为行星过近日点的时刻。在这六个轨道根数中，i、Ω、ω三个量决定了轨道平面和长轴在空间的位置，而 a、e、τ 三个量决定了行星在任何时刻在轨道上的位置，同时还必须求解开普勒方程

$$E-e\sin E=M=n(t-\tau) \qquad (3.1)$$

其中E为偏近点角，M为平近点角，n为行星的平均运动角速度。

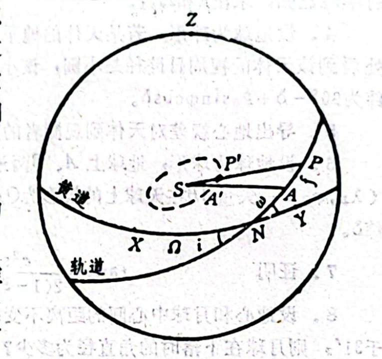


图3.1　行星的轨道要素i、Ω、ω

在图3.1中，S为太阳，行星的轨道在天球内为虚线，A'为行星轨道近日点位置，P'为行星在时刻t时的位置，它们在天球上的投影分别为A和P，N为轨道对黄道的升交点，X为春分点方向，X，Y，Z为日心黄道直角坐标轴在天球上的投影。各个大圆弧的长度如图上所示，其中 $AP=f$ 为真近点角。

行星的日心黄道直角坐标（x，y，z）就是行星向径 r 在三个坐标轴上的投影，也就是r各乘上它同三坐标轴间交角的余弦，因此行星相对于日心的位置矢量 $\vec{r}$ 为

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\cos PX\\\cos PY\\\cos PZ\end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

三个方向余弦可以由图中的各已知量根据球面三角形求出。

由球面三角形PXN计算$\cos PX$，因$XN=\Omega$，$NP=\omega+f$，$\angle XNP=180°-i$，得

$$\cos PX=\cos(f+\omega)\cos\Omega-\sin(f+\omega)\sin\Omega\cos i \qquad (3.3)$$

由球面三角形PYN可得

$$\cos PY=\cos(f+\omega)\sin\Omega+\sin(f+\omega)\cos\Omega\cos i \qquad (3.4)$$

由球面三角形PZN可得

$$\cos PZ=\sin(f+\omega)\sin i$$

将（3.3）—（3.5）式代入（3.2）式，得

$$\vec{r}=r\begin{pmatrix}\cos(f+\omega)\cos\Omega-\sin(f+\omega)\sin\Omega\cos i\\\cos(f+\omega)\sin\Omega+\sin(f+\omega)\cos\Omega\cos i\\\sin(f+\omega)\sin i\end{pmatrix}$$

考虑地球的轨道，这时 $i=0$，并定义近日点黄经π为

$$\pi=\Omega+\omega$$

则地球相对于日心的位置矢量为

$$\vec{r}=r\begin{pmatrix}\cos(f+\pi)\\\sin(f+\pi)\\0\end{pmatrix}$$

地球

真近点角f和偏近点角E有下列关系

$$\left.\begin{aligned}r\cos f&=a(\cos E-e)\\r\sin f&=a\sqrt{1-e^2}\sin E\end{aligned}\right\}$$

将上式代入（3.8）式，得

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}a(\cos E-e)\cos\pi-a\sqrt{1-e^2}\sin E\sin\pi\\a(\cos E-e)\sin\pi+a\sqrt{1-e^2}\sin E\cos\pi\\0\end{pmatrix}$$

其中的偏近点角E可以从求解开普勒方程（3.1）式得到。

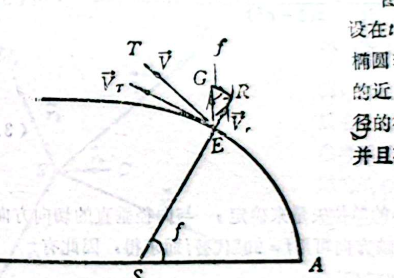


图3.2　地球轨道的速度矢量

图3.2表示

设在t时地球在

椭圆轨道在E

的近日点。根

径的径向速度

并且有

$V_r=$

$V_T=$

沿向径的

两个分量。过

GR垂直于ER。根据矢量加法有

$$\vec{ER}=\vec{EG}+\vec{GR}$$

由图可知

$$EG=\operatorname{cosec}f\,V_r=\operatorname{cosec}f\frac{dr}{dt}$$

$$GR=\cot f\,V_r=\cot f\frac{dr}{dt}$$

由球面三角形PZN可得

$$\cos PZ=\sin(f+\omega)\sin i \tag{3.5}$$

将（3.3）—（3.5）式代入（3.2）式，得

$$\vec{r}=r\begin{pmatrix}\cos(f+\omega)\cos\Omega-\sin(f+\omega)\sin\Omega\cos i\\ \cos(f+\omega)\sin\Omega+\sin(f+\omega)\cos\Omega\cos i\\ \sin(f+\omega)\sin i\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

考虑地球的轨道，这时$i=0$，并定义近日点黄经π为

$$\pi=\Omega+\omega \tag{3.7}$$

则地球相对于日心的位置矢量为

$$\vec{r}=r\begin{pmatrix}\cos(f+\pi)\\ \sin(f+\pi)\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

真近点角f和偏近点角E有下列关系

$$\left.\begin{aligned}r\cos f&=a(\cos E-e)\\ r\sin f&=a\sqrt{1-e^2}\sin E\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

将上式代入（3.8）式，得

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}a(\cos E-e)\cos\pi-a\sqrt{1-e^2}\sin E\sin\pi\\ a(\cos E-e)\sin\pi+a\sqrt{1-e^2}\sin E\cos\pi\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

其中的偏近点角E可以从求解开普勒方程（3.1）式得到。

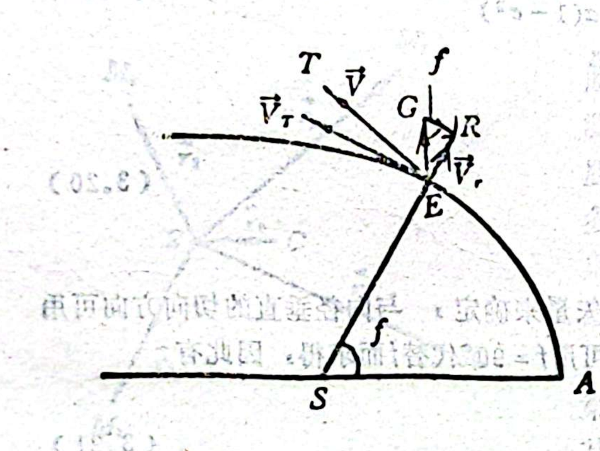


图3.2　地球轨道的速度矢量

图3.2表示地球E绕太阳S的部分椭圆轨道。设在t时地球在E点，它的速度矢量$\vec{V}$的方向即椭圆轨道在E点的切线方向$\vec{ET}$，A为地球轨道的近日点。根据理论力学，$\vec{V}$可以分解为沿向径的径向速度V_r和与向径垂直的切向速度V_T，并且有

$$\left.\begin{aligned}V_r&=\frac{dr}{dt}\\ V_T&=r\frac{df}{dt}\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

沿向径的径向速度$\vec{ER}=\vec{V_r}$还可以分解成两个分量。过E点作EG平行于椭圆的短轴，且GR垂直于ER。根据矢量加法有

$$\vec{ER}=\vec{EG}+\vec{GR} \tag{3.12}$$

由图可知

$$\left.\begin{aligned}EG&=\operatorname{cosec}f\,V_r=\operatorname{cosec}f\frac{dr}{dt}\\ GR&=\cot f\,V_r=\cot f\frac{dr}{dt}\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

$\overrightarrow{GR}$平行于$\overrightarrow{V}_r$，但和$\overrightarrow{V}_r$的方向相反，所以$\overrightarrow{V}_r$沿$\overrightarrow{GR}$的分量$\cot f\dfrac{dr}{dt}$可记为沿$\overrightarrow{V}_r$方向的分量$-\cot f\dfrac{dr}{dt}$。

综上所述，可知速度矢量$\overrightarrow{V}$可分解为沿$\overrightarrow{V}_r$的分量$\overrightarrow{V}_1$和沿$\overrightarrow{EG}$方向的分量$\overrightarrow{V}_2$，即

$$\overrightarrow{V}=\overrightarrow{V}_1+\overrightarrow{V}_2 \tag{3.14}$$

这两个矢量的大小为

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= r\frac{df}{dt}-\cot f\frac{dr}{dt} \\ V_2 &= \operatorname{cosec} f\frac{dr}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

由开普勒第二定律可得

$$\frac{df}{dt}=\frac{h}{r^2} \tag{3.16}$$

其中h为椭圆轨道的面积速度常数

$$h=na^2\sqrt{1-e^2} \tag{3.17}$$

椭圆轨道的极坐标方程为

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \tag{3.18}$$

将上式对t求导，得

$$\frac{dr}{dt}=\frac{a(1-e^2)e\sin f}{(1+e\cos f)^2}\frac{df}{dt}=\frac{he\sin f}{a(1-e^2)} \tag{3.19}$$

将（3.16）和（3.19）式代入（3.15）式，得

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_0=\frac{h}{a(1-e^2)} \\ V_2 &= \frac{he}{a(1-e^2)}=eV_0 \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

$\overrightarrow{V}_1$和$\overrightarrow{V}_2$的单位矢量可根据（3．8）式的$\overrightarrow{r}$的单位矢量来确定，与向径垂直的切向方向可用$f+90°$代替f而求得，平行于椭圆轨道的短轴方向可用$f=90°$代替f而求得，因此有

$$\overrightarrow{V}_1=V_0\begin{pmatrix}-\sin(f+\pi)\\ \cos(f+\pi)\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.21}$$

$$\overrightarrow{V}_2=eV_0\begin{pmatrix}-\sin\pi\\ \cos\pi\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

由（3.14）式得速度矢量为

$$\overrightarrow{V}=V_0\begin{pmatrix}-\sin(f+\pi)-e\sin\pi\\ \cos(f+\pi)+e\cos\pi\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.23}$$

地球的轨道根数是严格对应于地月系质心绕日心的轨道椭圆。因此(3.10)和(3.23)式给出的地球的位置矢量和速度矢量是对应于地月系质心相对日心，而不是地心相对日心。为了要求得地心相对日心的位置矢量和速度矢量，需要加上地心相对地月系质心的位置矢量和速度矢量。

令M和 m 分别是地球和月球的质量，地心相对地月系质心的位置矢量为$\vec{r}_1$，月球相对地心的位置矢量为$\vec{r}'$，则它们将满足下列方程

$$M\vec{r}_1 + m(\vec{r}_1 + \vec{r}') = 0 \tag{3.24}$$

即

$$\vec{r}_1 = -\frac{m}{m+M}\vec{r}' \tag{3.25}$$

对上式求导，得

$$\dot{\vec{r}}_1 = -\frac{m}{m+M}\dot{\vec{r}}' \tag{3.26}$$

因此从地月系质心转换到地心需加下列改正

$$\left.\begin{aligned} \delta\vec{r}_1 &= \vec{r}_1 = -\frac{m}{m+M}\vec{r}' \\ \delta\vec{V}_1 &= \dot{\vec{r}}_1 = -\frac{m}{m+M}\dot{\vec{r}}' \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

其中$\vec{r}'$和$\dot{\vec{r}}'$为月球相对地心的位置矢量和速度矢量。地月系质心总是处在地球内，因而$\delta\vec{r}_1$的改正比地心视差效应小；$\delta\vec{V}_1$约为12.5 米/秒，它对应于8.5毫角秒的光行差改正。虽然这些改正都很小，但不能完全被忽略。

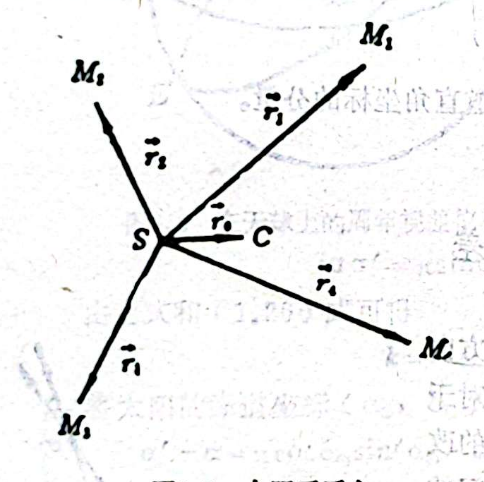


图3.3 太阳系质心

在讨论行星运动时，通常考虑相对轨道，因此原点取在日心，但对太阳系外天体和恒星的方位观测，如在第一章第三节中所述原点则应取在太阳系质心，因为日心有加速运动，它不适宜于作为惯性参考系的原点。当原点取在太阳系质心时，上面考虑的地心相对日心的位置矢量和速度矢量还需要作进一步的改正。

在图3.3中，设在任一时刻t太阳在S点，M_i为第i颗行星的位置及它的质量(包括其卫星的质量)，其中$M_3 = M + m$对应于地月系，M和m分别为地球和月球的质量，C为太阳系质心，C和M_i相对S的位置矢量分别记为$\vec{r}_0$和$\vec{r}_i$。设以太阳质量为单位，由质心定义知

$$(1+\sum_i M_i)\vec{r}_0 = \sum_i M_i\vec{r}_i \tag{3.28}$$

即

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum_i M_i\vec{r}_i}{1+\sum_i M_i} \tag{3.29}$$

上式是对太阳系内所有行星 i 求和。

对（3.29）式求导，得

$$\dot{\vec{r}}_0=\frac{\sum\limits_i M_i\dot{\vec{r}}_i}{1+\sum\limits_i M_i} \tag{3.30}$$

因此原点从日心转换到太阳系质心需加下列改正

$$\left.\begin{aligned}\delta\vec{r}_2&=-\vec{r}_0=-\frac{\sum\limits_i M_i\vec{r}_i}{1+\sum\limits_i M_i}\\ \delta\vec{V}_2&=-\dot{\vec{r}}_0=-\frac{\sum\limits_i M_i\dot{\vec{r}}_i}{1+\sum\limits_i M_i}\end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

其中 $\vec{r}_i$ 和 $\dot{\vec{r}}_i$ 为行星相对日心的位置矢量和速度矢量，可根据行星的日心吻切轨道根数推算。原点从日心坐标到太阳系质心坐标的改正也是一个小量，既使在某一特殊瞬间，当所有的行星都在太阳的一侧并连成一线，太阳系质心与日心的距离也小于0.01天文单位，这相当于距离最近恒星的视差效应；$\delta\vec{V}_2$ 主要是木星引起，它对应大约10毫角秒的光行差改正。

最后我们得到地心相对太阳系质心的位置矢量和速度矢量的计算公式

$$\left.\begin{aligned}\vec{R}&=\vec{r}+\delta\vec{r}_1+\delta\vec{r}_2=\vec{r}-\frac{m}{M_3}\vec{r}'-\frac{\sum\limits_i M_i\vec{r}_i}{1+\sum\limits_i M_i}\\ \dot{\vec{R}}&=\vec{V}+\delta\vec{V}_1+\delta\vec{V}_2=\vec{V}-\frac{m}{M_3}\dot{\vec{r}}'-\frac{\sum\limits_i M_i\dot{\vec{r}}_i}{1+\sum\limits_i M_i}\end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

其中 $\vec{r}$ 和 $\vec{V}$ 的表达式（3.10）和（3.23）式是对应于黄道直角坐标的分量。

第二节　周年视差

由于地球绕太阳的周年运动，从地心处看到的天体方向和从太阳系质心看到的方向之间的差别叫做周年视差。对于恒星通常取太阳系质心为标准点。太阳系质心和日心间的改正仅仅是一个小量，对精度要求不高时，常常不考虑它们间的差异，因此周年视差也可认为是天体的地心坐标与日心坐标之差。

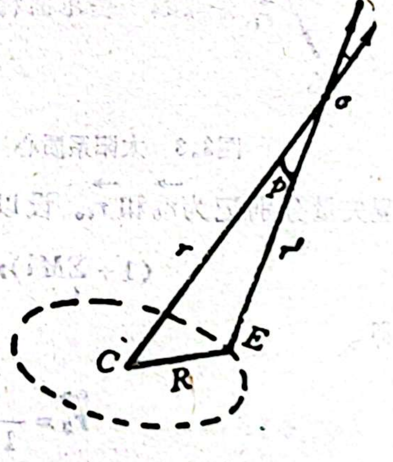


图3.4　周年视差

在图3.4中，C 点代表太阳系质心，E 点为地心，σ 为一天体。令 r 和 R 表示天体和地心到太阳系质心的距离，r' 表示天体到地心的距离。对于 C、E 两点天体 σ 的方向差即是该天体的周年视差 p。当地球绕太阳系质心运动时，p 在不断变化。在三角形 $CE\sigma$ 中，根据正弦定律有

$$\sin p = \frac{R}{r}\sin\angle\sigma EC \tag{3.33}$$

为了表示恒星的距离，定义

$$\sin\pi = \frac{a}{r} \tag{3.34}$$

其中a为地球轨道的半长轴，π等于地球轨道半长轴在恒星处所张的角，通常称为恒星的周年视差（简称为恒星视差），但其概念与p不同。由（3.33）式知，当$R=a$，$\angle\sigma EC=90°$时，$p=\pi$，由此可知π只是p的特例。恒星的周年视差都小于1″，多数只有百分之几角秒，目前测定恒星视差只能准确到0″.01，而绝大多数恒星的周年视差小于此值，可以忽略不计。在天文年历的"恒星平位置表"中列出了恒星的周年视差π的值。

若π以弧度为单位，则用天文单位表示的恒星距离r可写为

$$r = \pi^{-1} \tag{3.35}$$

上式若π以角秒为单位，则恒星距离r用秒差距（pc）表示。有

$$1\text{秒差距} = 206265\text{天文单位} = 3.2616\text{光年} = 3.0857\times10^{13}\text{公里} \tag{3.36}$$

若把图3.4中C看作为日心，将图3.4投影到地心天球上，得图3.5。图中P为天极，QQ'为赤道，EE'为黄道，S为太阳。若原先观测者在日心观测，后来位移到地心，显然位移方向在天球上的投影——向点A应该在黄道上，并且和太阳的黄经正好相差180°。因此由于周年视差使恒星背离向点方向的移动实际上可看做是向着太阳方向移动，即在日心看到的恒星位置σ将沿着通过恒星和太阳的大圆σS向太阳方向位移$\sigma\sigma'$，σ'为在地心看到的恒星位置。由（3.33）式并取$R=1$（即认为地球轨道为圆形轨道），有

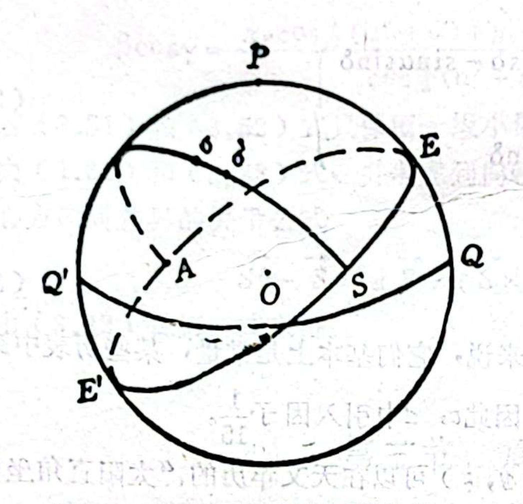


图3.5 在天球上的周年视差位移

$$\sigma\sigma' = \pi\sin\sigma S \tag{3.37}$$

由上式和（1.26）式可得

$$k = -\pi \tag{3.38}$$

将太阳的赤道坐标（$\alpha_\odot$，$\delta_\odot$）和（3.38）式代入（1.27）式，得

$$\left.\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= \pi\cos\delta_\odot\sin(\alpha_\odot - \alpha)\sec\delta \\ \delta' - \delta &= \pi[\cos\delta\sin\delta_\odot - \sin\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha_\odot - \alpha)]\end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

上式就是将天体的日心坐标换算为地心坐标的公式，式中的$\alpha_\odot$和$\delta_\odot$可以从天文年历的"太阳表"中查得。

若考虑日心为原点的黄道坐标系，不难求得周年视差对恒星黄道坐标的影响

$$\left.\begin{aligned}d\lambda &= \lambda' - \lambda = \pi\sec\beta\sin(\lambda_\odot - \lambda) \\ d\beta &= \beta' - \beta = -\pi\sin\beta\cos(\lambda_\odot - \lambda)\end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

地球的公转引起恒星视差位移具有相应的周期性，这使恒星在天球上的视位置描绘出相应周期的椭圆轨迹。令x和y分别为因周年视差引起恒星位移在黄经圈和黄纬圈上的分量，即

$x = \cos\beta d\lambda$，$y = d\beta$。将（3.40）式代入，消除掉（$\lambda_{\odot}-\lambda$），可以求得恒星在天球上描绘的视周年轨迹为

$$\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{\pi^2\sin^2\beta} = 1 \tag{3.41}$$

这是一个椭圆方程，其半长轴为π，半短轴为$\pi\sin\beta$，椭圈的长轴平行于黄道，这些椭圆称为视差椭圆。

（3.39）式还能化为更便于应用的形式。考虑地球相对日心为原点的赤道直角坐标，有

$$\left.\begin{aligned} x_e &= -\cos\delta_{\odot}\cos\alpha_{\odot} \\ y_e &= -\cos\delta_{\odot}\sin\alpha_{\odot} \\ z_e &= -\sin\delta_{\odot} \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

于是可将（3.39）式化为

$$\left.\begin{aligned} \alpha'-\alpha &= \pi(x_e\sin\alpha - y_e\cos\alpha)\sec\delta \\ \delta'-\delta &= \pi(x_e\cos\alpha\sin\delta + y_e\sin\alpha\sin\delta - z_e\cos\delta \end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

设太阳中心的黄纬为零，ε为黄赤交角，则容易求得$z_e = y_e\tan\varepsilon$，代入（3.43）式，并引入下列辅助量

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{1}{15}\cos\alpha\sec\delta \qquad & c' &= \tan\varepsilon\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta \\ d &= \frac{1}{15}\sin\alpha\sec\delta \qquad & d' &= \cos\alpha\sin\delta \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

则（3.43）式成为

$$\left.\begin{aligned} \alpha'-\alpha &= \pi(x_e d - y_e c) \\ \delta'-\delta &= \pi(x_e d' - y_e c') \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

其中c、d、c'、d'称为恒星常数，对同一恒星来说，它们基本上是常量，某些历表中列出所载恒星的恒星常数。赤经部分以时秒为单位，因此c，d中引入因子$\frac{1}{15}$。

太阳相对地心为原点的赤道直角坐标（x, y, z）可以在天文年历的“太阳直角坐标表”中查到，它们和地球相对日心为原点的赤道直角坐标（x_e，y_e，z_e）有下述关系

$$\left.\begin{aligned} x &= -x_e \\ y &= -y_e \\ z &= -z_e \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

因此（3.43）和（3.45）式可分别改写为

$$\left.\begin{aligned} \alpha'-\alpha &= \pi(y\cos\alpha - x\sin\alpha)\sec\delta \\ \delta'-\delta &= \pi(z\cos\delta - x\cos\alpha\sin\delta - y\sin\alpha\sin\delta) \end{aligned}\right\} \tag{3.47}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha'-\alpha &= \pi(yc - xd) \\ \delta'-\delta &= \pi(yc' - xd') \end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

对较精确的计算，地球轨道应是椭圆，地球公转运动的向径R应取相对于太阳系质心的值。在图3.4中，若用$\vec{S}$和$\vec{S'}$分别表示太阳系质心和地心到天体方向的单位矢量，$\vec{R}$表示太阳系质心到地心的向径矢量，则有

$$r'\vec{S'} = r\vec{S} - \vec{R} \tag{3.49}$$

若采用赤道直角坐标系，上式成为

$$\begin{pmatrix} \cos\delta'\cos\alpha' \\ \cos\delta'\sin\alpha' \\ \sin\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} - \pi \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

由于恒星σ离c和E很远，所以近似地取$r=r'$。注意上式的x_e，y_e，z_e是地球相对太阳系质心为原点的赤道直角坐标，而不是相对日心的。它们可以在天文年历的“地球质心位置和速度表”中查到。

由（3.50）式的三个式子可推导出直接计算$\alpha'-\alpha$和$\delta'-\delta$的表达式，容易求得

$$\left.\begin{aligned} \tan(\alpha'-\alpha) &= \frac{\pi(x_e\sin\alpha - y_e\cos\alpha)\sec\delta}{1-\pi(x_e\cos\alpha + y_e\sin\alpha)\sec\delta} \\ \tan(\delta'-\delta) &= \frac{\pi\beta\sin(\delta-\gamma)}{1-\pi\beta\cos(\delta-\gamma)} \end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

其中β和γ为辅助量，且$\beta>0$，有

$$\left.\begin{aligned} \beta\sin\gamma &= z_e \\ \beta\cos\gamma &= \frac{x_e\cos\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha) + y_e\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)} \end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

若（3.51）和（3.52）式只保留一级小量，则得到和（3.43）式相同形式的表达式

由（1.32）和（3.38）式，并考虑到向径矢量$\vec{R}$的方向，可求得天体的地心方向和太阳系质心方向间差异的矢量公式

$$\vec{S'} - \vec{S} = \pi\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{R}) \tag{3.53}$$

$\vec{R}$可由（3.32）式第一式求得。

第三节　周年光行差

观测者随地球公转而作周年运动，这种运动引起的光行差称为周年光行差。

周年光行差的大小由（2.92）式给出，即

$$\alpha = \frac{v}{c}\sin\theta \tag{3.54}$$

其中v为地心相对太阳系质心的速度，θ为天体的真方向和地球运动方向间的夹角。地球的轨道速度约是30公里/秒，它是光速的10^{-4}，因而周年光行差位移的量级约为20″或10^{-4}弧度，通常经典的一阶处理就足够了。在较高精度工作中，才需考虑二阶效应和相对论效应。

1960年前，计算光行差改正不考虑行星和月球对地球运动的影响，同时把地球的绕日公转看作是圆周运动，因此由（3.32）和（3.23）式可得地心相对日心的速度矢量在黄道直角坐标系的分量

$$\vec{v} = V_0\begin{pmatrix} -\sin(f+\pi) \\ \cos(f+\pi) \\ 0 \end{pmatrix} = V_0\begin{pmatrix} \sin\lambda_\odot \\ -\cos\lambda_\odot \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

其中$\lambda_{\odot}=f+\pi-180^{\circ}$为太阳的黄经，$V_0$即地球公转的平均轨道速度。

在图3.6中，S为太阳，K为黄极，LL'为黄道，E为地球在某一瞬间的位置，其运动方向即该点的切线方向EA，这个方向在天球上的投影为A点，A点就是周年光行差的向点。设$E\gamma$是春分点方向，从图上容易看出向点位于黄道上，其黄道坐标为

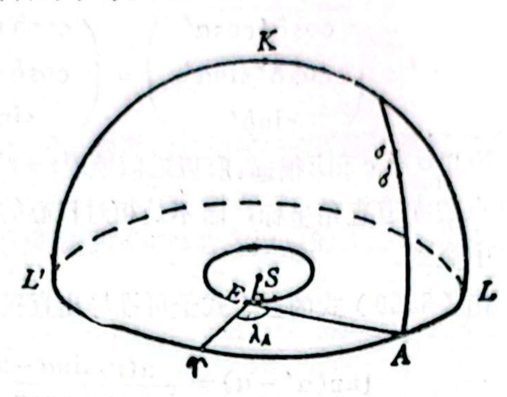


图3.6 周年光行差的向点

$$\lambda_A=\lambda_{\odot}-90^{\circ},\quad \beta_A=0 \tag{3.56}$$

因此观测者在静止时看到的天体的真位置σ将沿通过天体和向点的大圆σA向A点位移$\sigma\sigma'$，σ'为运动中看到的天体的视位置。由(2.92)式可得

$$\sigma\sigma'=\frac{V_0}{c}\sin\sigma A \tag{3.57}$$

由上式和（1.26）式可得

$$k=-\frac{V_0}{c}=-K \tag{3.58}$$

K称为周年光行差常数。

将向点A的赤道坐标（α_A，δ_A）和（3.58）式代入（1.27）式，得

$$\left\{\begin{aligned}&\alpha'-\alpha=-K\cos\delta_A\sin(\alpha-\alpha_A)\sec\delta\\&\delta'-\delta=-K[\sin\delta\cos\delta_A\cos(\alpha-\alpha_A)-\cos\delta\sin\delta_A]\end{aligned}\right\} \tag{3.59}$$

容易建立向点A的赤道坐标和黄道坐标的关系，同时利用（3.56）式，有

$$\left.\begin{aligned}&\cos\alpha_A\cos\delta_A=\cos\lambda_A=\sin\lambda_{\odot}\\&\sin\alpha_A\cos\delta_A=\sin\lambda_A\cos\varepsilon=-\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon\\&\sin\delta_A=\sin\lambda_A\sin\varepsilon=-\cos\lambda_{\odot}\sin\varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{3.60}$$

将（3.60）式代入（3.59）式，得

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=-K\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon\cos\alpha\sec\delta-K\sin\lambda_{\odot}\sin\alpha\sec\delta\\\delta'-\delta&=-K\cos\lambda_{\odot}\sin\varepsilon\cos\delta+K\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta-K\sin\lambda_{\odot}\cos\alpha\sin\delta\\&=-K\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon(\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta)-K\sin\lambda_{\odot}\cos\alpha\sin\delta\end{aligned}\right\} \tag{3.61}$$

（3.61）式还能化为更便于应用的形式。由（3.55）式可得到地心相对日心的速度矢量在相应的赤道直角坐标系的分量

$$\vec{v}_C=\begin{pmatrix}\dot{x}_c\\\dot{y}_c\\\dot{z}_c\end{pmatrix}=R_x(-\varepsilon)\vec{v}=V_0\begin{pmatrix}\sin\lambda_{\odot}\\-\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon\\-\cos\lambda_{\odot}\sin\varepsilon\end{pmatrix} \tag{3.62}$$

于是可将（3.61）式化为

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=-\frac{1}{c}(\dot{x}_e\sin\alpha\sec\delta-\dot{y}_e\cos\alpha\sec\delta)\\ \delta'-\delta&=-\frac{1}{c}(\dot{x}_e\cos\alpha\sin\delta+\dot{y}_e\sin\alpha\sin\delta-\dot{z}_e\cos\delta)\\ &=-\frac{1}{c}[\dot{x}_e\cos\alpha\sin\delta-\dot{y}_e(\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta)]\end{aligned}\right\} \tag{3.63}$$

与计算周年视差时一样，引入下列辅助量

$$\left.\begin{aligned}c&=\frac{1}{15}\cos\alpha\sec\delta \qquad c'=\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta\\ d&=\frac{1}{15}\sin\alpha\sec\delta \qquad d'=\cos\alpha\sin\delta\end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

并引入符号

$$\left.\begin{aligned}C&=\frac{1}{c}\dot{y}_e=-K\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon\\ D&=-\frac{1}{c}\dot{x}_e=-K\sin\lambda_{\odot}\end{aligned}\right\} \tag{3.65}$$

代入（3.63）式，可得

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=Cc+Dd\\ \delta'-\delta&=Cc'+Dd'\end{aligned}\right\} \tag{3.66}$$

由（3.65）式可知，C和D与太阳的位置有关，而与恒星的位置无关。

也可以用另一套符号简化，令

$$\left.\begin{aligned}C&=h\sin H\\ D&=h\cos H\\ i&=C\tan\varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{3.67}$$

则（3.63）式可写成

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=\frac{1}{15}h\sin(H+\alpha)\sec\delta\\ \delta'-\delta&=h\cos(H+\alpha)\sin\delta+i\cos\delta\end{aligned}\right\} \tag{3.68}$$

C，D叫做贝塞尔日数；h，H，i叫做独立日数；它们分别以日期为引数列于天文年历中。

若考虑日心为原点的黄道坐标系。将相应的黄道坐标代替赤道坐标代入(3.63)式，可得

$$\left.\begin{aligned}d\lambda&=\lambda'-\lambda=-K\sec\beta\cos(\lambda-\lambda_{\odot})\\ d\beta&=\beta'-\beta=K\sin\beta\sin(\lambda-\lambda_{\odot})\end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

上式和周年视差的（3.40）式类似。因此周年光行差也引起恒星在天球上描绘出一个椭圆轨迹。椭圆的半长轴为K，半短轴为$K\sin\beta$，椭圆的长轴平行于黄道，这些椭圆称为光行差椭圆。

对完整的光行差计算，需考虑行星和月球对地球运动的影响及地球轨道的椭圆运动。类似于周日光行差的（2.102）和（2.105）式，有

$$\frac{c'}{c}\vec{S}^{*}=\vec{S}'+\frac{\dot{\vec{R}}}{c} \tag{3.70}$$

$$\vec{S}^{*}-\vec{S}'=-\frac{1}{c}\vec{S}'\times(\vec{S}'\times\dot{\vec{R}}) \tag{3.71}$$

其中$\vec{S}^{*}$为地心在运动时所见天体的方向，$\vec{S}'$为静止观测者在地心所见天体的方向，在允许精度范围，通常$\vec{S}'$可用太阳系质心所见天体的方向$\vec{S}$代替，$\dot{\vec{R}}$为地心相对太阳系质心的速度矢量。

若采用赤道直角坐标系，根据（3.70）式可推导出直接计算$\alpha^{*}-\alpha$和$\delta^{*}-\delta$的表达式。若忽视掉三级以上小量，容易求得

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^{*}-\alpha=&-\frac{1}{c}(\dot{x}_e\sin\alpha-\dot{y}_e\cos\alpha)\sec\delta+\frac{1}{c^2}(\dot{x}_e\sin\alpha-\dot{y}_e\cos\alpha)\\
&\cdot(\dot{x}_e\cos\alpha+\dot{y}_e\sin\alpha)\sec^2\delta\\
\delta^{*}-\delta=&-\frac{1}{c}(\dot{x}_e\cos\alpha\sin\delta+\dot{y}_e\sin\alpha\sin\delta-\dot{z}_e\cos\delta)\\
&-\frac{1}{2c^2}(\dot{x}_e\sin\alpha-\dot{y}_e\cos\alpha)^2\tan\delta+\frac{1}{c^2}(\dot{x}_e\cos\alpha\sin\delta\\
&+\dot{y}_e\sin\alpha\sin\delta-\dot{z}_e\cos\delta)(\dot{x}_e\cos\alpha\cos\delta+\dot{y}_e\sin\alpha\cos\delta\\
&+\dot{z}_e\sin\delta)
\end{aligned}\right\} \tag{3.72}$$

若上式仅保留一级小量，有

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^{*}-\alpha&=-\frac{1}{c}(\dot{x}_e\sin\alpha\sec\delta-\dot{y}_e\cos\alpha\sec\delta)\\
\delta^{*}-\delta&=-\frac{1}{c}(\dot{x}_e\cos\alpha\sin\delta+\dot{y}_e\sin\alpha\sin\delta-\dot{z}_e\cos\delta)
\end{aligned}\right\} \tag{3.73}$$

（3.73）式和（3.63）式具有完全相同的形式。

$\dot{x}_e$，$\dot{y}_e$，$\dot{z}_e$为$\dot{\vec{R}}$在相应的赤道直角坐标系的分量，它们可由（3.32）式第二式求得

$$\vec{v}_e=\begin{pmatrix}\dot{x}_e\\ \dot{y}_e\\ \dot{z}_e\end{pmatrix}=R_x(-\varepsilon)\dot{\vec{R}}=R_x(-\varepsilon)\left[\vec{V}-\frac{m}{M_s}\dot{\vec{r}}'-\frac{\sum_i M_i\dot{\vec{r}}_i}{1+\sum_i M_i}\right] \tag{3.74}$$

$\vec{V}$，$\dot{\vec{r}}'$，$\dot{\vec{r}}_i$在黄道直角坐标系的分量可写为

$$\vec{V}=\begin{pmatrix}V_\xi\\ V_\eta\\ V_\zeta\end{pmatrix}=V_0\begin{pmatrix}\sin\lambda_\odot-e\sin\pi\\ -\cos\lambda_\odot+e\cos\pi\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.75}$$

$$\dot{\vec{r}}'=\begin{pmatrix}\dot{r}'_\xi\\ \dot{r}'_\eta\\ \dot{r}'_\zeta\end{pmatrix},\quad \dot{\vec{r}}_i=\begin{pmatrix}\dot{r}_{i\xi}\\ \dot{r}_{i\eta}\\ \dot{r}_{i\zeta}\end{pmatrix} \tag{3.76}$$

在允许的精确范围内，可以近似认为月球和行星都在黄道上运动（即忽略白道和行星轨道对黄道的倾角），因此

$$\dot{r}'_{\zeta} = \dot{r}_{i\zeta} = 0 \tag{3.77}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_e &= V_\xi - \frac{m}{M_3}\dot{r}'_\xi - \sum_i \frac{M_i}{1+\sum_i M_i}\dot{r}_{i\xi} \\
\dot{y}_e &= (V_\eta - \frac{m}{M_3}\dot{r}'_\eta - \sum_i \frac{M_i}{1+\sum_i M_i}\dot{r}_{i\eta})\cos\varepsilon \\
\dot{z}_e &= (V_\eta - \frac{m}{M_3}\dot{r}'_\zeta - \sum_i \frac{M_i}{1+\sum_i M_i}\dot{r}_{i\eta})\sin\varepsilon
\end{aligned}\right\} \tag{3.78}$$

将上式代入到（3.73）式，得

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^*-\alpha &= (-K\cos\lambda_\odot\cos\varepsilon)\cos\alpha\sec\delta + (-K\sin\lambda_\odot)\sin\alpha\sec\delta \\
&\quad + (Ke\cos\pi\cos\varepsilon)\cos\alpha\sec\delta + (Ke\sin\pi)\sin\alpha\sec\delta \\
&\quad + M\cos\alpha\sec\delta + N\sin\alpha\sec\delta \\
\delta^*-\delta &= (-K\cos\lambda_\odot\cos\varepsilon)(\tan\varepsilon\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta) + (-K\sin\lambda_\odot)\cos\alpha\sin\delta \\
&\quad + (Ke\cos\pi\cos\varepsilon)(\tan\varepsilon\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta) + (Ke\sin\pi)\cos\alpha\sin\delta \\
&\quad + M(\tan\varepsilon\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta) + N\cos\alpha\sin\delta
\end{aligned}\right\} \tag{3.79}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
M &= \frac{1}{c}(-\frac{m}{M_3}\dot{r}'_\eta - \sum_i \frac{M_i}{1+\sum_i M_i}\dot{r}_{i\eta})\cos\varepsilon \\
N &= \frac{1}{c}(\frac{m}{M_3}\dot{r}'_\xi + \sum_i \frac{M_i}{1+\sum_i M_i}\dot{r}_{i\xi}
\end{aligned}\right\} \tag{3.80}$$

引入（3.64）式的辅助量，（3.79）式可写为

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^*-\alpha &= (-K\cos\lambda_\odot\cos\varepsilon)c + (-K\sin\lambda_\odot)d + (Ke\cos\pi\cos\varepsilon)c \\
&\quad + (Ke\sin\pi)d + Mc + Nd \\
\delta^*-\delta &= (-K\cos\lambda_\odot\cos\varepsilon)c' + (-K\sin\lambda_\odot)d' + (Ke\cos\pi\cos\varepsilon)c' \\
&\quad + (Ke\sin\pi)d' + Mc' + Nd'
\end{aligned}\right\} \tag{3.81}$$

以上两式中，第一、二项和 e 无关，第三、四项却明显地决定于e，通常把它们叫做E项，并记为

$$\begin{aligned}
(\alpha^*-\alpha)_E &= (Ke\cos\pi\cos\varepsilon)c + (Ke\sin\pi)d \\
(\delta^*-\delta)_E &= (Ke\cos\pi\cos\varepsilon)c' + (Ke\sin\pi)d'
\end{aligned} \tag{3.82}$$

E项和太阳黄经无关，没有周年变化，对某一恒星来说，E项变化很小基本上是常量。

1960年起，计算周年光行差改正虽然考虑了行星和月球对地球运动的影响，但是E 项仍然略去，这时（3.81）式成为

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^*-\alpha &= (-K\cos\lambda_\odot\cos\varepsilon)c + (-K\sin\lambda_\odot)d + Mc + Nd \\
\delta^*-\delta &= (-K\cos\lambda_\odot\cos\varepsilon)c' + (-K\sin\lambda_\odot)d' + Mc' + Nd'
\end{aligned}\right\} \tag{3.83}$$

若令

$$\left.\begin{aligned}
C &= \frac{1}{c}\dot{y}_e - Ke\cos\pi\cos\varepsilon = -K\cos\lambda_\odot\cos\varepsilon + M \\
D &= -\frac{1}{c}\dot{x}_e - Ke\sin\pi = -K\sin\lambda_\odot + N
\end{aligned}\right\} \tag{3.84}$$

则（3.83）式可写成和（3.66）式完全相同的形式。

随着计算机的使用和精度的日益提高，需要考虑E项的缓慢的长期变化，E项的人为略去给计算带来许多不便，为此IAU决定从1984年起恒星星表和天文历表在计算周年光行差时，应严格地按地球相对于太阳系质心的速度计算，星表和历表中的恒星平位置将不暗含E项。因此目前天文年历给出的C，D按下式计算

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{1}{c}\dot{y}_e = -K\cos\lambda_{\odot}\cos\varepsilon + Ke\cos\pi\cos\varepsilon + M \\ D &= -\frac{1}{c}\dot{x}_e = -K\sin\lambda_{\odot} + Ke\sin\pi + N \end{aligned}\right\} \tag{3.85}$$

这时计算$\alpha^* - \alpha$和$\delta^* - \delta$的表达式仍可写成和（3.66）式完全相同的形式。

$\dot{x}_e$，$\dot{y}_e$，$\dot{z}_e$的数值可以在天文年历的“地球质心位置和速度表”中查到，它们的单位为天文单位(AU)/天，C和D以角秒为单位，有

$$\left.\begin{aligned} c &= 173.1446\,\text{AU/天} \\ C &= \frac{1}{c}\dot{y}_e = 1191.286\,\dot{y}_e \\ D &= -\frac{1}{c}\dot{x}_e = -1191.286\,\dot{x}_e \\ i &= C\tan\varepsilon = 1191.286\,\dot{z}_e \end{aligned}\right\} \tag{3.86}$$

考虑了地球轨道的椭圆运动后，（3.58）式的光行差常数K成为

$$K = \frac{V_0}{c} = \frac{h}{a(1-c^2)} = \frac{2\pi a}{T\sqrt{1-e^2}} \tag{3.87}$$

其中V_0为地月系质心绕日心运动在向径垂直的切向方向上的分量。1896年以来光行差常数一直采用数值20″.47，1968年起改用20″.4958，1984年起采用IAU1976天文常数系统的值20″.49552(J2000.0)

上述关于光行差的讨论中仅考虑由于观测者的运动速度而引起恒星方向的变化，没有考虑恒星本身的运动，这样的光行差又称为恒星光行差。事实上恒星还存在自行，改正了上面考虑的视差和光行差对恒星所测位置的影响后，并未给出观测瞬间恒星的几何质心位置，给出的仅是τ年前恒星的位置，其中τ是恒星到观测者的光行时，因此理论上还需要加上光行时乘以周年自行的改正。

此外太阳系在星际空间的运动也引起光行差，这称为长期光行差，这一运动包括太阳本动和银河系自转。长期光行差对某一恒星位置的影响基本上是常量。由于太阳系在空间运动的速度和方向还不能准确地测定，因而长期光行差还不能精确地计算。

（3.71）式给出的是运动和静止的地心观测者所见天体的方向之差。从太阳系质心坐标到地心坐标的转换对天体位置的影响应将（3.53）和（3.71）式相加而得到，即

$$\vec{S^*} - \vec{S} = \pi\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{R}) - \frac{1}{c}\vec{S}\times(\vec{S}\times\dot{\vec{R}}) \tag{3.88}$$

其中$\vec{S^*}$是在t时从地心所见天体的方向，$\vec{S}$是在$t-\tau$时从太阳系质心观测天体的几何方向，从太阳系质心到地心的位移是$\vec{R}$，地心相对太阳系质心的速度为$\dot{\vec{R}}$。在准确到一阶改正时视差

改正和光行差改正的次序并不重要。

用相对论可以更准确地介释光行差现象和更完善地讨论光行差改正，这将在第七章第二节和第六节里介绍。

第四节　行星光行差

行星和太阳系天体与恒星不同，它们本身的运动很显著，因此用第三节中的讨论是不适用的。用来描述行星的光行差效应称为行星光行差，它包括地球轨道速度引起的周年光行差以及光线从行星发射到地球这一段时间内行星运动引起的改正。

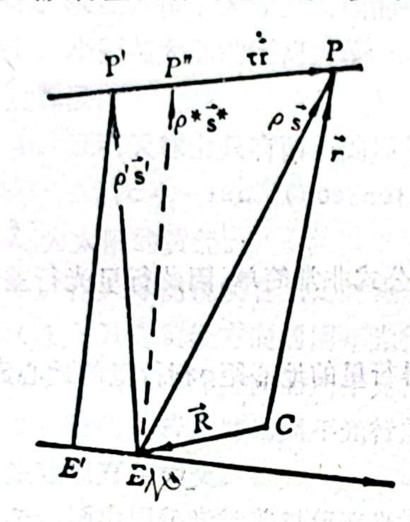


图3.7　行星光行差

在图3.7中，假设C，E和P分别表示t时太阳系质心，地球和行星，$\vec{r}$和$\vec{R}$分别为行星和地球的质心位置矢量，显然t时行星的几何方向为

$$\overrightarrow{EP}=\rho\vec{S}=\vec{r}-\vec{R} \tag{3.89}$$

其中$\vec{S}$为$\overrightarrow{EP}$的单位矢量。

位于E的观测者所接受的星光并不是从P发射来的，而是在相隔τ以前从P'发射来的，τ为光从行星射至地球所需的时间，称为光行时。设E'为地球在$t-\tau$时的位置，$\overrightarrow{EP'}=\rho'\vec{S'}$，显然单位矢量$\vec{S'}$表示静止的观测者所见行星的方向，但观测者以速度$\dot{\vec{R}}$运动，根据第三节的讨论，行星的方向将朝向点方向偏移至$\overrightarrow{EP''}=\rho^*\vec{S^*}$，因此在瞬间$t$时观测者所见行星的视方向为$\vec{S^*}$，容易证明$\vec{S^*}/\!/\overrightarrow{E'P'}$，即行星在$t$时的视方向就是$t-\tau$时的真方向。根据(3.71)式可以得到周年光行差改正为

$$\vec{S^*}-\vec{S'}=-\frac{1}{c}\vec{S'}(\times\vec{S'}\times\dot{\vec{R}}) \tag{3.90}$$

在允许的精度范围内上式右端可以用$\vec{S}$代替$\vec{S'}$于是有

$$\vec{S^*}-\vec{S'}=-\frac{1}{c}\vec{S}\times(\vec{S}\times\dot{\vec{R}}) \tag{3.91}$$

行星在时间τ内从P'移动到P，若忽略行星运动的加速度，有$\overrightarrow{P'P}=\tau\dot{\vec{r}}$，其中$\dot{\vec{r}}$为行星的质心速度矢量。显然有

$$\rho'\vec{S'}=\rho\vec{S}-\tau\dot{\vec{r}} \tag{3.92}$$

将上式同$\vec{S}$进行两次矢量积，可得

$$(\vec{S}\cdot\vec{S'})\vec{S}-\vec{S'}=-\frac{\tau}{\rho'}\vec{S}\times(\vec{S}\times\dot{\vec{r}}) \tag{3.93}$$

考虑到$\rho'=c\tau$，$(\vec{S}\cdot\vec{S'})\simeq1$，上式成为

$$\vec{S'}-\vec{S}=\frac{1}{c}\vec{S}\times(\vec{S}\times\dot{\vec{r}}) \tag{3.94}$$

上式是因行星运动引起的改正公式。

将周年光行差改正（3.90）式和因行星运动引起的改正（3.94）式联合，得到了行星光行差改正

$$\vec{S}^* - \vec{S} = (\vec{S}^* - \vec{S}') + (\vec{S}' - \vec{S})$$
$$= \frac{1}{c}\vec{S} \times [\vec{S} \times (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}})] \tag{3.95}$$

由上式看出行星光行差改正仅依赖于行星和地球的相对速度 $(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}})$。

微分（3.89）式，可以得到

$$\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}} = \dot{\rho}\vec{S} + \rho\dot{\vec{S}} \tag{3.96}$$

将（3.96）式代入到（3.95）式，得

$$\vec{S}^* - \vec{S} = -\frac{\rho}{c}[\dot{\vec{S}} - (\dot{\vec{S}} \cdot \vec{S})\vec{S}] \tag{3.97}$$

考虑到 $\dot{\vec{S}} \cdot \vec{S} = 0$，$\rho \simeq c\tau$，于是有

$$\vec{S}^* = \vec{S} - \tau\dot{\vec{S}} \tag{3.98}$$

上式是由行星的几何位置计算行星视位置的计算公式，公式非常简单，因此行星光行差很容易进行改正。

若采用赤道直角坐标系，利用（3.89）式可以求得行星的地心距 ρ 和行星的地心赤道坐标 (α, δ)，有 $\tau \simeq \frac{\rho}{c}$，于是（3.98）式成为

$$\left.\begin{aligned} \alpha^* &= \alpha - \frac{\rho}{c} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \\ \delta^* &= \delta - \frac{\rho}{c} \cdot \frac{d\delta}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{3.99}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \alpha^* &= \alpha - 0.00577552\rho\frac{d\alpha}{dt} \\ \delta^* &= \delta - 0.00577552\rho\frac{d\delta}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{3.100}$$

其中 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 分别为赤经和赤纬的每日变化。

若欲根据行星的视位置计算行星的几何位置，则可将（3.98）式作适当修改，即

$$\vec{S} = \vec{S}^* + \tau\dot{\vec{S}}^* \tag{3.101}$$

由于那时光行时 τ 不知道，可采用对行星位置进行至少三次观测，从而可求得行星的地心距 ρ（可参阅天体力学中关于确定初始轨道的章节）于是有 $\tau \simeq \frac{\rho}{c}$，这个过程可以重复直到求解的 τ 收敛。

上述行星光行差的讨论仅保留到一级小量。行星的速度同地球的速度有相同的量级，行星速度的二阶项被忽略，同时还忽略了行星速度在时间 τ 期间的变化。

第三章　习　题

1．证明当太阳的黄经近似为 $\lambda_{\odot}=90°+\tan^{-1}(\tan\alpha\sec\varepsilon)$ 时周年视差对恒星赤经的影响最大。

2．在一年中哪一天哪一恒星时刻：

（1）周年光行差和周日光行差使恒星朝同一方向位移？

（2）周年光行差和周日光行差使恒星朝相反方向位移？

3．求证：位于天球上大圆的一些恒星被周年光行差改变后的位置是在平行于该大圆的小圆上，小圆与大圆的距离为 $K\sin AN$，其中 K 为周年光行差常数，AN 为通过向点 A 与大圆的垂直弧段。

4．证明天球上只有两点的周年光行差效应为零，这两点的赤道坐标近似为

$$\alpha=-\tan^{-1}(\cos\varepsilon\cot\lambda_{\odot}),\quad \delta=\pm\sin^{-1}(\sin\varepsilon\cos\lambda_{\odot})$$

其中 $\lambda_{\odot}$ 为太阳的黄经。

5．作天球图说明在给定时刻的下列两种情况下恒星位于天球上的什么位置？

（1）只有黄经方向的周年光行差位移；

（2）只有赤纬方向的周年光行差位移。

6．证明：若赤纬的周年光行差有最大值时，则连接恒星和太阳，恒星和天极的两大圆在恒星处以直角相交。

7．画出周年光行差对黄道坐标影响的天球图，并推导出（3.68）式。

8．证明：对于给定的恒星若赤经的周年光行差达到最大值或最小值时，则太阳的赤经 $\alpha_{\odot}$ 就等于恒星的赤经，并且 $\tan\alpha_{A}\tan\alpha_{\odot}=-\cos^{2}\varepsilon$。其中 α_{A} 是地球周年运动向点的赤经。

9．何谓行星光行差？它与恒星光行差有何区别？行星光行差即行星在 t 时的真方向和 $t-\tau$ 时的真方向之差，对不对，为什么？

10．证明：太阳真黄经＝太阳视黄经 $+\dfrac{20''.4955}{R}$，其中 R 为太阳的地心距。

周年视差周年光行差都是误差椭圆的本质原因是什么

第四章　岁差、章动和极移

第一节　日月岁差和行星岁差

在前面几章的讨论中，都把作为天体位置参考基准的天球坐标系看成是不动的。但是由于地球自转轴在空间的指向和地球公转轨道平面的改变，赤道、黄道和春分点都有以星空为背景的运动，因而以它们为基本圈和基本点的赤道坐标系和黄道坐标系就时刻改变着它们在天球上的位置。显然即使天体本身不动，表征天体位置的坐标值也将不断地变化着。

由于太阳、月球对地球赤道隆起部分的引力作用，使北天极绕北黄极沿半径为黄赤交角ε的小圆顺时针向（从天球以外看）旋转，周期约25800年。实际的天极运动的轨迹并不是小圆，而是一条复杂的曲线，这一曲线大体上可以认为是一条波纹线，如图4.1(a)所示。为了便于讨论，把实际的天极运动分解为两种运动，一是一个假想天极P_0绕黄极的小圆运动，

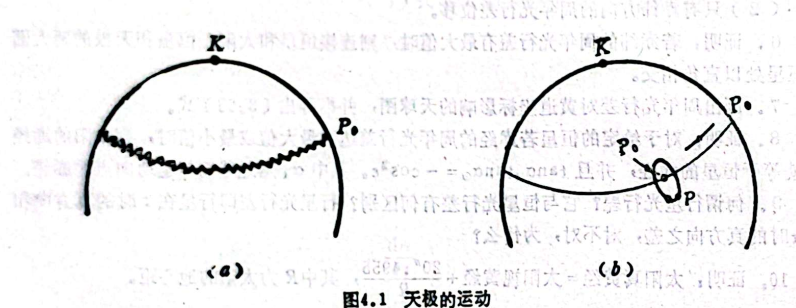


图4.1　天极的运动

这个假想天极称为平天极（简称平极）；另一是实际的天极即真天极P（简称真极）绕平天极P_0的运动，如图4.1(b)所示。平极的这种运动叫日月岁差。真极绕平极的运动是由很多不同周期运动合成的，其轨迹十分复杂，若忽略掉短周期的微小运动，则真极绕平极作顺时针向（从天球外看）的椭圆运动，周期约18.6年。真极相对于天极的运动叫章动。真极一面绕平极作章动运动，一面随同平极作日月岁差运动，两种运动的合成即真极在天球上绕黄极的实际运动。

此外，由于行星对地球公转运动的摄动，黄道平面也有一种缓慢而持续的运动相应地引起黄极的运动，这种现象叫行星岁差。行星岁差比日月岁差影响要小得多。

与某一瞬间的平极对应的天赤道是该瞬间的平赤道，该瞬间的黄道对平赤道的升交点叫平春分点。以平赤道作为基本圈，平春分点作为零点的赤道坐标系叫天球平赤道坐标系。天体相对于某一瞬间的平赤道坐标系的坐标叫天体在该瞬间的平坐标或平位置。显然平赤道坐标系跟随岁差而变动，它只有长期变化，没有周期变化。由于平赤道坐标系是变化的，所以不同

时刻有不同的平赤道坐标系。相应地与某一瞬间的真极对应的天
间的黄道对真赤道的升交点叫真春分点。以真赤道作为基本圈，真
系叫天球真赤道坐标系。天体相对于某一瞬间的真赤道坐标系的
标或真位置。显然真赤道坐标系跟随岁差和章动一起变动，它既有
平赤道坐标系一样，不同时刻有不同的真赤道坐标系。由于岁差（
天体在不同瞬间的平坐标互不相等，而同一瞬间的平坐标和真坐

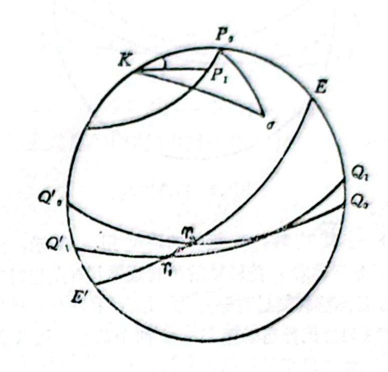


图4.2　日月岁差

当仅考虑日月
不动的。在图 4.2
时的平极，平春分点
间的北黄极和黄道。
$+dt$时平极和平
春分点则沿黄道位
方向正好与太阳周
在任意瞬间平
KP_0（即黄赤交角
运动的方向是在垂
线方向，也就是说
瞬间的平春分点。

若天极P_0绕黄
则$\angle P_0KP_1 = \psi dt$，由于$\angle P_0K\gamma_0 = \angle P_1K\gamma_1 = 90°$，故$\gamma_0\gamma_1 = \psi dt$
上的运动速度。由于春分点的运动，所有天体的黄经将以同样的
日月岁差速率。将平春分点沿黄道的运动分解为沿着赤道和垂直
们分别为$\psi\cos\varepsilon$和$\psi\sin\varepsilon$。前一分量使所有天体的赤经以同样的速
日月岁差速率，后一分量使所有天体的赤纬变化，故称为赤纬日月
记为n，由线速度和角速度的关系可知，n也即平极运动的线速度。

日月岁差使赤道、春分点不断改变位置，故天体的α，δ，λ也
动，因此在dt时间内日月岁差对黄经和黄纬的影响为

$$d\lambda = \psi dt,\ d\beta = 0$$

据根由北黄极K、平极P_0和天体σ组成的球面三角形利用正弦
公式可得

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda$$

$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda$$

$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha$$

对（4.2）和（4.3）式分别求微分，并考虑到日月岁差对黄赤交角

$$\cos\delta\sin\alpha d\alpha = (\cos\beta\sin\lambda - \sin\varepsilon\sin\delta\cos^2\alpha)\psi dt$$

$$\cos\delta d\delta = \sin\varepsilon\cos\beta\cos\lambda\psi dt$$

将（4.4）和（4.2）式分别代入（4.5）和（4.6）式，得

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= \psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta)dt \\ d\delta &= \psi\sin\varepsilon\cos\alpha dt \end{aligned}\right\}$$

时刻有不同的平赤道坐标系。相应地与某一瞬间的真极对应的天赤道是该瞬间的真赤道，该瞬间的黄道对真赤道的升交点叫真春分点。以真赤道作为基本圈，真春分点作为零点的赤道坐标系叫天球真赤道坐标系。天体相对于某一瞬间的真赤道坐标系的坐标叫天体在该瞬间的真坐标或真位置。显然真赤道坐标系跟随岁差和章动一起变动，它既有长期变化又有周期变化。如平赤道坐标系一样，不同时刻有不同的真赤道坐标系。由于岁差（包括日月岁差和行星岁差），天体在不同瞬间的平坐标互不相等，而同一瞬间的平坐标和真坐标的差异是由章动引起的。

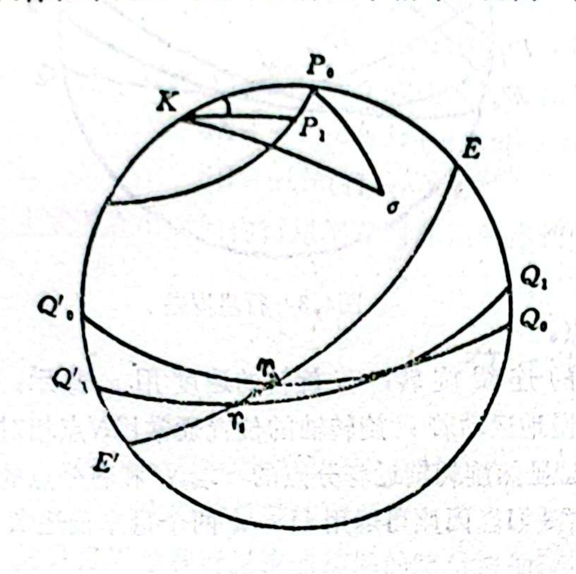


图4.2　日月岁差

当仅考虑日月岁差时，黄极被认为是固定不动的。在图4.2中，设P_0，γ_0，$Q_0Q'_0$为t_0时的平极，平春分点和平赤道，K，EE'为该瞬间的北黄极和黄道。由于日月岁差，在$t_1 = t_0 + dt$时平极和平赤道位移至P_1和$Q_1Q'_1$，平春分点则沿黄道位迁至γ_1，平春分点位移的方向正好与太阳周年视运动的方向相反。

在任意瞬间平极总是沿着以K为圆心、KP_0（即黄赤交角ε）为半径的小圆运动，其运动的方向是在垂直于该瞬间KP_0的大圆的切线方向，也就是说平极运动的方向总是指向该瞬间的平春分点。

若天极P_0绕黄极K运动的角速度用ψ表示，则$\angle P_0KP_1 = \psi dt$，由于$\angle P_0K\gamma_0 = \angle P_1K\gamma_1 = 90°$，故$\gamma_0\gamma_1 = \psi dt$，即$\psi$也是平春分点在黄道上的运动速度。由于春分点的运动，所有天体的黄经将以同样的速度增加，所以ψ又称黄经日月岁差速率。将平春分点沿黄道的运动分解为沿着赤道和垂直于赤道两个方向的分量，它们分别为$\psi\cos\varepsilon$和$\psi\sin\varepsilon$。前一分量使所有天体的赤经以同样的速度增加，故$\psi\cos\varepsilon$称为赤经日月岁差速率；后一分量使所有天体的赤纬变化，故称为赤纬日月岁差速率或赤纬岁差速率记为n，由线速度和角速度的关系可知，n也即平极运动的线速度。

日月岁差使赤道、春分点不断改变位置，故天体的α，δ，λ也不断变化，但黄道没有移动，因此在dt时间内日月岁差对黄经和黄纬的影响为

$$d\lambda = \psi dt,\ d\beta = 0 \tag{4.1}$$

据根由北黄极K、平极P_0和天体σ组成的球面三角形利用正弦公式、余弦公式和五元素公式可得

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda \tag{4.2}$$

$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda \tag{4.3}$$

$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha \tag{4.4}$$

对（4.2）和（4.3）式分别求微分，并考虑到日月岁差对黄赤交角没有影响，有

$$\cos\delta\sin\alpha d\alpha = (\cos\beta\sin\lambda - \sin\varepsilon\sin\delta\cos^2\alpha)\psi dt \tag{4.5}$$

$$\cos\delta d\delta = \sin\varepsilon\cos\beta\cos\lambda\psi dt \tag{4.6}$$

将（4.4）和（4.2）式分别代入（4.5）和（4.6）式，得

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= \psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta)dt \\ d\delta &= \psi\sin\varepsilon\cos\alpha dt \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

上式是在dt时间内日月岁差对赤经和赤纬的影响的公式。

由于行星对地球公转运动的摄动，黄道也不是固定不变的。黄道定义为地月系质心的平轨道面，因此黄道只存在长期变化。当仅考虑行星岁差时，平极被认为是固定不动的。在图4.3中，设K_0，γ_0，E_0E_0'为t_0时的北黄极，平春分点和黄道，P，Q_0Q_0'为该瞬间的平极和平赤道。由于行星岁差，在$t_1=t_0+dt$时北黄极和黄道位移至K_1和E_1E_1'，平春分点则沿平赤道位移至γ_1，方向与赤经增加的方向相同。

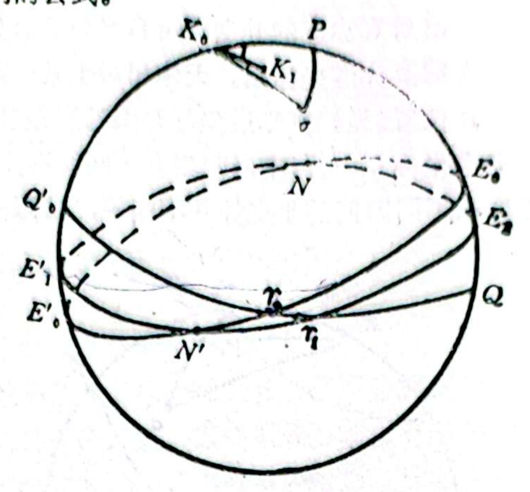


图4.3　行星岁差

t_1时的黄道E_1E_1'和t_0时的黄道E_0E_0'相交于两点，其中近春分点的一点N'称为E_1E_1'对E_0E_0'的降交点，与N'相对的一点N称为升交点。

由于行星岁差，黄道面在空间绕N和N'的连线旋转，若旋转的速度用π表示，则$\angle\gamma_0N'\gamma_1=\pi dt$。同时旋转轴也在黄道面内缓慢地运动着，旋转轴的位置通常用N点相对于t_0时的黄道E_0E_0'的黄经Π来表示，即$\gamma_0N=\Pi$。显然旋转轴近春分点的一端N'和春分点的距离$N'\gamma_0$等于$180°-\Pi$，即N'点的黄经等于$180°+\Pi$。因此可以用Π，π两个量来描述黄道的行星岁差运动。

若平春分点在平赤道上的运动速度用χ表示、则$\gamma_0\gamma_1=\chi dt$。由于春分点的运动，所有天体的赤经以同样的速度χ减小，故χ称为赤经行星岁差速率。χ在黄道上的分量$\chi\cos\varepsilon$称为黄经行星岁差速率。

行星岁差使黄道、春分点不断改变位置，故天体的λ、β、α也不断变化，但赤道没有移动，因此在dt时间内行星岁差对赤经和赤纬的影响为

$$d\alpha=-\chi dt,\ d\delta=0 \tag{4.8}$$

根据由北黄极K_0，平极P和天体σ组成的球面三角形，利用正弦公式，余弦公式和五元素公式可得

$$\cos\beta\cos\lambda=\cos\delta\cos\alpha \tag{4.9}$$

$$\sin\beta=\cos\varepsilon\sin\delta-\sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha \tag{4.10}$$

$$\cos\beta\sin\lambda=\sin\delta\sin\varepsilon+\cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha \tag{4.11}$$

$$\cos\delta\sin\alpha=-\sin\beta\sin\varepsilon+\cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda \tag{4.12}$$

对（4.9）和（4.10）式分别求微分，并考虑到行星岁差引起黄赤交角变化，有

$$\cos\beta\sin\lambda d\lambda=(-\cos\delta\sin\alpha-\sin\beta\sin\varepsilon\cos^2\lambda)\psi dt \tag{4.13}$$

$$\cos\beta d\beta=(-\sin\delta\sin\varepsilon-\cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha)d\varepsilon+\sin\varepsilon\cos\lambda\cos\beta\chi dt \tag{4.14}$$

将（4.12）和（4.11）式分别代入（4.13）和（4.14）式，得

$$\left.\begin{aligned}d\lambda&=(\tan\beta\sin\varepsilon\sin\lambda-\cos\varepsilon)\chi dt+\tan\beta\cos\lambda d\varepsilon\\ d\beta&=\sin\varepsilon\cos\lambda\chi dt-\sin\lambda d\varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

上式中χ和$d\varepsilon$可由图4.3的球面三角形$\gamma_0\gamma_1N'$来确定。根据前述有$\gamma_0N'=180°-\Pi$，$\gamma_0\gamma_1=\chi dt$，$\angle\gamma_0N'\gamma_1=\pi dt$，此外$\angle N'\gamma_0\gamma_1=180°-\varepsilon$，$\angle\gamma_0\gamma_1N'=\varepsilon+d\varepsilon$。利用正弦公式和四元

素公式可得

$$\sin(\chi dt)\sin(\varepsilon+d\varepsilon)=\sin\Pi\sin(\pi dt) \tag{4.16}$$

$$\cos\varepsilon\cos(\chi dt)=\sin(\chi dt)\cot\Pi+\sin\varepsilon\cot(\varepsilon+d\varepsilon) \tag{4.17}$$

对（4.16）式如只保留一级小量，则有

$$\chi=\pi\sin\Pi\operatorname{cosec}\varepsilon \tag{4.18}$$

将上式代入（4.17）式，并仅保留一级小量，有

$$d\varepsilon=\pi\cos\Pi dt \tag{4.19}$$

将（4.18）和（4.19）式代入（4.15）式，得

$$\left.\begin{aligned}d\lambda&=-\chi\cos\varepsilon dt+\pi\tan\beta\cos(\Pi-\lambda)dt\\ d\beta&=\pi\sin(\Pi-\lambda)dt\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

上式是在dt时间内行星岁差对赤经和赤纬的影响的公式。

第二节　总岁差

在第一节中考虑日月岁差时，分别认为黄道或赤道是不动的。事实上黄道和赤道是在一起运动，它们的总效应即总岁差。当时间间隔足够小时，总岁差的影响可以认为是上面求得的日月岁差和行星岁差结果的简单迭加。

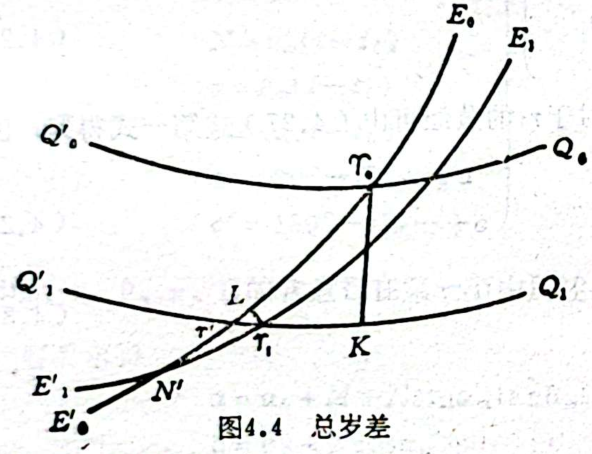


图4.4　总岁差

在图4.4中，设$Q_0Q'_0$、$E_0E'_0$、Υ_0为t_0时的平赤道、黄道和平春分点的位置，在$t_1=t_0+dt$时相应的位置移至$Q_1Q'_1$、$E_1E'_1$、Υ_1，Υ'为$Q_1Q'_1$和$E_0E'_0$的交点。通常由日月岁差引起的赤道位移要比由行星岁差引起的黄道位移要大得多。根据第一节所述，$\Upsilon_0\Upsilon_1=\psi dt$，$\Upsilon'\Upsilon_1=\chi dt$。

从Υ_1作垂直于$E_0E'_0$的大园弧Υ_1L，L即Υ_1在$E_0E'_0$上之投影，则$\Upsilon'L=\chi\cos\varepsilon dt$。因此在日月岁差和行星岁差的综合作用下，平春分点在黄道上的位移为

$$\Upsilon_0L=p dt=\psi dt-\chi\cos\varepsilon dt \tag{4.21}$$

即

$$p=\psi-\chi\cos\varepsilon \tag{4.22}$$

p称为黄经总岁差速率。

从Υ_0作垂直于$Q_1Q'_1$的大园弧Υ_0K，K即Υ_0在$Q_1Q'_1$上之投影，则$K\Upsilon'=\psi\cos\varepsilon dt$。因此在日月岁差和行星岁差的综合作用下，平春分点在赤道上的位移为

$$K\Upsilon_1=m dt=\psi\cos\varepsilon dt-\chi dt \tag{4.23}$$

即

$$m=\psi\cos\varepsilon-\chi \tag{4.24}$$

m 称为赤经岁差速率。

将（4.7）和（4.8）式联合起来，得到日月岁差和行星岁差对天体的赤经、赤纬综合影响的公式为

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= (\psi\cos\varepsilon - \chi + \psi\sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta)dt \\ &= (m + n\sin\alpha\tan\delta)dt \\ d\delta &= \psi\sin\varepsilon\cos\alpha dt \\ &= n\cos\alpha dt \end{aligned}\right\} \qquad (4.25)$$

其中

$$n = \psi\sin\varepsilon \qquad (4.26)$$

n 即赤纬岁差速率

将（4.1）和（4.20）式联合起来，得到日月岁差和行星岁差对天体的黄经、黄纬综合影响的公式为

$$\left.\begin{aligned} d\lambda &= p dt + \pi\tan\beta\cos(\Pi - \lambda)dt \\ d\beta &= \pi\sin(\Pi - \lambda)dt \end{aligned}\right\} \qquad (4.27)$$

总岁差除影响天体的坐标外，还影响天体的日心轨道要素：轨道倾角 i，轨道升交点黄经 Ω 和轨道近日点的角距 ω。在图4.5中，设 E_0E_0'，γ_0 为 t_0 时的黄道和平春分点，E_1E_1'，γ_1 为 $t_1 = t_0 + dt$ 时的黄道和平春分点，PP' 为天体的轨道，A 点表示天体在近日点的位置，则有

$$\left.\begin{aligned} &\angle AL_0N = i, \ \angle AL_1N = i + di \\ &\gamma_0L_0 = \Omega, \ \gamma_1L_1 = \Omega + d\Omega \\ &L_0A = \omega, \ L_1A = \omega + d\omega \end{aligned}\right\} \qquad (4.28)$$

已知 $\gamma_0N = \Pi$，因此 $L_0N = \Pi - \Omega$。N 相对于 γ_1 的黄经可由（4.27）式第一式得到，因为 $\beta = 0$，有

$$\gamma_1N = \Pi + p dt \qquad (4.29)$$

于是有

$$L_1N = \Pi - \Omega + p dt - d\Omega \qquad (4.30)$$

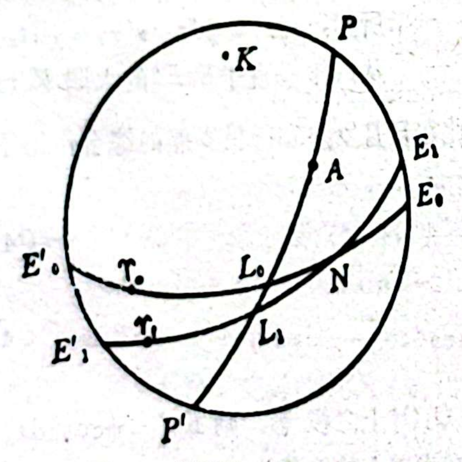



图4.5 总岁差对 i，Ω，ω 的影响

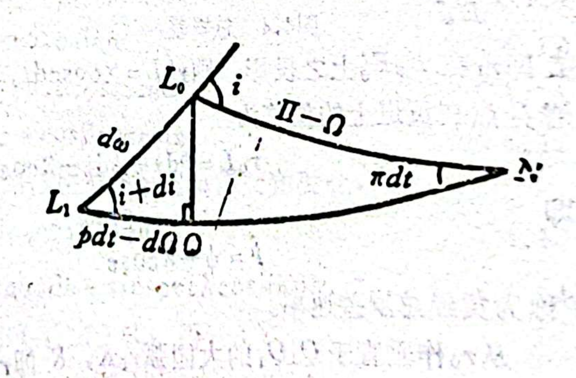


图4.6 球面三角形 L_0L_1N

将图4.5中球面三角形 L_0L_1N 放大表示在图4.6中。过 L_0 作以 N 点为极的小园弧，与 L_1N 相交于 Q 点。有 $QN = L_0N = \Pi - \Omega$，因此 $L_1Q = L_1N - QN = p dt - d\Omega$。将 L_0QL_1 看作为平面直角三角形，有

$$\left.\begin{aligned} d\omega &= L_0Q\cdot\operatorname{cosec}(i+di) \\ p dt - d\Omega &= L_0Q\cdot\cot(i+dt) \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

将$L_0Q=\pi dt\sin(\Pi-\Omega)$代入上式，并仅保留一级小量，得

$$\left.\begin{aligned} d\omega &= \pi\operatorname{cosec} i\sin(\Pi-\Omega)dt \\ d\Omega &= p dt - \pi\cot i\sin(\Pi-\Omega)dt \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

利用球面三角形L_0L_1N中的四元素公式可得

$$-\cos d\omega\cos i = \sin d\omega\cot(\Pi-\Omega) - \sin i\cot(i+di) \tag{4.33}$$

即

$$\sin i\cos(i+di) - \cos d\omega\cos i\sin(i+di) = \sin d\omega\cot(\Pi-\Omega)\sin(i+di) \tag{4.34}$$

将（4.32）式第一式代入上式，并仅保留一级小量，得

$$di = -\pi\cos(\Pi-\Omega)dt \tag{4.35}$$

（4.32）和（4.35）式是总岁差对天体的日心轨道要素i、ω、Ω影响的公式。

上述求得的日月岁差、行星岁差和总岁差对天体位置影响的公式仅取到一级小量，其中的dt通常不能超过一年。当时间间隔为数年时，一阶公式就不能满足所需要的精度。下面我们给出保留到二级小量的类似公式，其基本形式和一阶公式相同。

设t_0为初始历元，t为经过数年间隔后的目标历元，定义下列新的参数

$$\left.\begin{aligned} M &= m_m(t-t_0) \\ N &= n_m(t-t_0) \\ a &= p_m(t-t_0) \\ b &= \pi_m(t-t_0) \\ c &= 180^\circ - \Pi_m + \tfrac{1}{2}a \\ c' &= 180^\circ - \Pi_m - \tfrac{1}{2}a \end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

其中m、n、p、π、Π的含意已在第一节中所述，下标m表示对应的历元为$\frac{1}{2}(t_0-t)$。

容易求得

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + M + N\sin\alpha_m\tan\delta_m \\ \delta &= \delta_0 + N\cos\alpha_m \\ \lambda &= \lambda_0 + a - b\tan\beta_0\cos(\lambda_0+c) \\ \beta &= \beta_0 + b\sin(\lambda_0+c) \\ i &= i_0 + b\cos(\Omega_0+c) \\ \omega &= \omega_0 + b\operatorname{cosec} i_0\sin(\Omega_0+c) \\ \Omega &= \Omega_0 + a - b\cot i_0\sin(\Omega_0+c) \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \alpha_m &= \alpha_0 + \tfrac{1}{2}(M + N\sin\alpha_0\tan\delta_0) \\ \delta_m &= \delta_0 + \tfrac{1}{2}N\cos\alpha_m \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

（4.37）式可用来代替（4.25）、（4.27）、（4.32）和（4.35）式。若时间间隔不大于50年，精度可好于1角秒。

第三节　岁差量表达式

通常需要计算从某一固定历元（例1950.0）到观测历元（例1992.0）的岁差变化，为此在给出岁差量表达式时，常需要三个历元：标准历元（或基本历元）t_0，起算历元（或固定历元）t_s和目标历元（或观测历元）t_D。

令T表示从t_0到t_s世纪数，t表示从t_s到t_D的世纪数，则有

$$\left.\begin{aligned} t_s &= t_0 + 100T \\ t_D &= t_0 + 100T + 100t \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

从t_s到t_D时间间隔内的岁差位移可以展开成时间间隔的幂级数，有

$$\alpha_A = (\alpha_1 + \alpha_2 T + \alpha_3 T^2)t + (\alpha_1' + \alpha_2' T)t^2 + \alpha_1'' t^3 \tag{4.40}$$

其中α_1，α_2，…，α_1''为系数。

由（4.40）式可求出在t_s时以世纪为单位的岁差运动速率

$$\alpha = \left(\frac{d\alpha_A}{dt}\right)\Big|_{t=0} = \alpha_1 + \alpha_2 T + \alpha_3 T^2 \tag{4.41}$$

其中α_1即在t_0时的岁差运动速率。

岁差量有十几个，每个量都可表示为类似（4.40）式的形式。表4.1列出了这些岁差量的名称和形式。图4.7给出了天球上的黄道-赤道图，图上标出了对应的岁差量。对黄经总岁差，纽康和安道伊尔（H.Andoyer）给出了略有不同的定义。纽康定义的黄经总岁差p_N是由（4.21）式给出，即

$$p_N = \gamma_S L = \psi_A - \chi_A \cos\omega_A \tag{4.42}$$

安道伊尔定义的黄经总岁差p_A是由不同的平面计量的两量相减，即

$$p_A = \gamma_D N - \gamma_s N = \wedge_A - \Pi_A \tag{4.43}$$

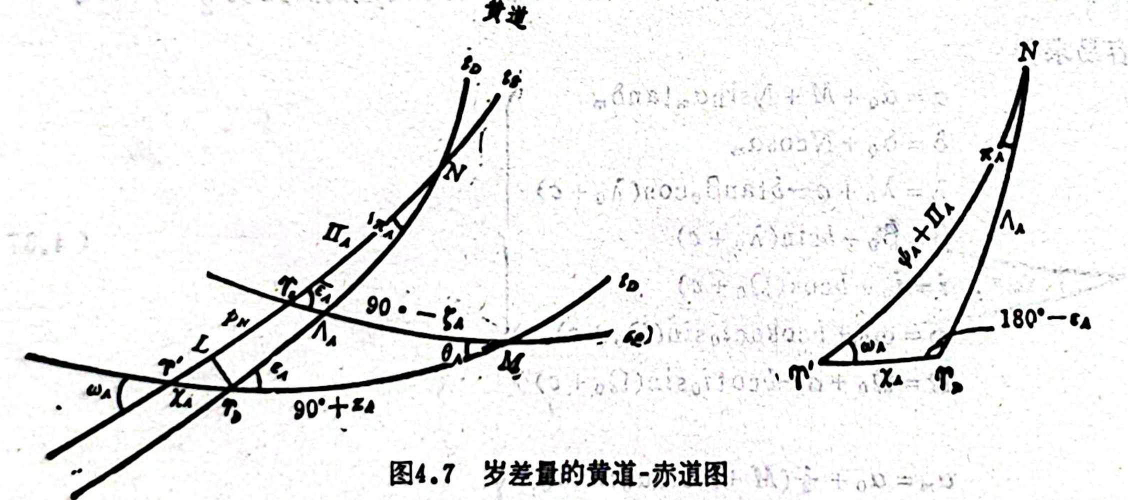


图4.7　岁差量的黄道-赤道图

在岁差的严格计算中，总是使用旋转矩阵来处理，因此安道伊尔的定义比纽康的定义更合适；但在讨论岁差位移时，则纽康的定义更容易使人明了。两个定义仅相差$0''.0005t^2$，采用任一种定义对其它岁差量的数值均无影响。

由（4.41）式知黄经总岁差表达式中的p_1即t_0时的黄经总岁差速率，又称岁差常数。

表4.1 岁差量的表达形式

符 号	名 称	形 式	参考面	起 点	终 点
π_A	黄道间的交角	$(q_1+q_2T+q_3T^2)t+(q'_1+q'_2T)t^2+q''_1t^3$	倾斜面	t_0黄道	t_D黄道
Π_A	黄道升交点的黄经	$x_0+x_1T+x_2T^2+(y_1+y_2T)t+y'_1t^2$	t_0黄道	t_0春分点	t_D黄道
$\sin\pi_A$ $\sin\Pi_A$	黄道面的行星摄动达表式	$(s_1+s_2T+s_3T^2)t+(s'_1+s'_2T)t^2+s''_1t^3$	t_0黄道		
$\sin\pi_A$ $\cos\Pi_A$		$(c_1+c_2T+c_3T^2)t+(c'_1+c'_2T)t^2+c''_1t^3$	t_0黄道		
$\bar{\varepsilon}_A$	黄赤交角	$\varepsilon_0+\varepsilon_1T+\varepsilon'_1T^2+\varepsilon''_1T^3$	倾斜面	t_0黄道	t_D赤道
ε_A		$\bar{\varepsilon}_A+(\varepsilon_1+\varepsilon_2T+\varepsilon_3T^2)t+(\varepsilon'_1+\varepsilon'_2T)t^2+\varepsilon''_1t^3$	倾斜面	t_D黄道	t_D赤道
ω_A	移动赤道与固定黄道的交角	$\bar{\varepsilon}_A+(\omega'_1+\omega'_2T)t^2+\omega''_1t^3$	倾斜面	t_0黄道	t_D赤道
ψ_A	黄经日月岁差	$(\psi_1+\psi_2T+\psi_3T^2)t+(\psi'_1+\psi'_2T)t^2+\psi''_1t^3$	t_0黄道	t_0春分点	t_D赤道
χ_A	赤经行星岁差	$(\chi_1+\chi_2T+\chi_3T^2)t+(\chi'_1+\chi'_2T)t^2+\chi''_1t^3$	t_D赤道	t_0黄道	t_D春分点
$p_A=\Lambda_A-\Pi_A$	安道伊尔的黄经总岁差	$(p_1+p_2T+p_3T^2)t+(p'_1+p'_2T)t^2+p''_1t^3$	Λ_A: t_D黄道 Π_A: t_0黄道	t_D春分点 t_0春分点	t_0黄道 t_D黄道
p_N	纽康的黄经总岁差	$p_A+(\eta'_1+\eta'_2T)t^2+\eta''_1t^3$	t_0黄道	t_0春分点	L
ζ_A	赤道岁差参数（描述为90°－ζ_A）	$(\zeta_1+\zeta_2T+\zeta_3T^2)t+(\zeta'_1+\zeta'_2T)t^2+\zeta''_1t^3$	t_0赤道	t_0春分点	t_D赤道
z_A	赤道岁差参数（描述为90°＋z_A）	$(z_1+z_2T+z_3T^2)t+(z'_1+z'_2T)t^2+z''_1t^3$	t_D赤道	t_D春分点	t_0赤道
θ_A	赤道岁差参数（赤道间的交角）	$(\theta_1+\theta_2T+\theta_3T^2)t+(\theta'_1+\theta'_2T)t^2+\theta''_1t^3$	倾斜面	t_0赤道	t_D赤道

1984年前岁差的计算中一直采用纽康的岁差常数$p_1 = 5025''.64$/回归世纪(对1900.0历元)。岁差量中三个赤道岁差参数ζ_A、z_A、θ_A是赤道坐标系由t_1转换至t_D时决定绕轴旋转的三个角变量。对基于纽康岁差常数值的赤道岁差参数ζ_A、z_A和θ_A,不同的作者求得了不同的表达式:

1897年纽康给出的公式为

$$
\left.
\begin{array}{ll}
T=-2.5 & \left\{\begin{array}{l}
\zeta_A = 5750''.17\left(\frac{t}{2.5}\right) + 1''.90\left(\frac{t}{2.5}\right)^2 + 0''.28\left(\frac{t}{2.5}\right)^3 \\
z_A = 5750''.17\left(\frac{t}{2.5}\right) + 6''.82\left(\frac{t}{2.5}\right)^2 + 0''.30\left(\frac{t}{2.5}\right)^3 \\
\theta_A = 5018''.10\left(\frac{t}{2.5}\right) - 2''.66\left(\frac{t}{2.5}\right)^2 - 0''.64\left(\frac{t}{2.5}\right)^3
\end{array}\right. \\
T=0.0 & \left\{\begin{array}{l}
\zeta_A = 5758''.88\left(\frac{t}{2.5}\right) + 1''.89\left(\frac{t}{2.5}\right)^2 + 0''.28\left(\frac{t}{2.5}\right)^3 \\
z_A = 5758''.88\left(\frac{t}{2.5}\right) + 6''.38\left(\frac{t}{2.5}\right)^2 + 0''.30\left(\frac{t}{2.5}\right)^3 \\
\theta_A = 5012''.77\left(\frac{t}{2.5}\right) - 2''.66\left(\frac{t}{2.5}\right)^2 - 0''.65\left(\frac{t}{2.5}\right)^3
\end{array}\right. \\
T=2.5 & \left\{\begin{array}{l}
\zeta_A = 5756''.61\left(\frac{t}{2.5}\right) + 1''.88\left(\frac{t}{2.5}\right)^2 + 0''.28\left(\frac{t}{2.5}\right)^3 \\
z_A = 5767''.61\left(\frac{t}{2.5}\right) + 6''.84\left(\frac{t}{2.5}\right)^2 + 0''.30\left(\frac{t}{2.5}\right)^3 \\
\theta_A = 5007''.44\left(\frac{t}{2.5}\right) - 2''.67\left(\frac{t}{2.5}\right)^2 - 0''.65\left(\frac{t}{2.5}\right)^3
\end{array}\right.
\end{array}
\right\} \quad (4.44)
$$

1911年安道伊尔给出的公式为

$$
\left.
\begin{array}{l}
\zeta_A = (2303''.5545 + 1''.39720T + 0.000060T^2)t + (0''.30240 \\
\qquad - 0''.000270T)t^2 + 0''.017995t^3 \\
z_A = (2303''.5545 + 1''.39720T + 0''.000060T^2)t + (1''.09480 \\
\qquad + 0''.000390T)t^2 + 0''.018325t^3 \\
\theta_A = (2005''.112 - 0''.8529T - 0''.00037T^2)t + (-0''.42650 \\
\qquad - 0''.00037T)t^2 - 0''.04180t^3
\end{array}
\right\} \quad (4.45)
$$

1961年美国天文历书和航海年历给出的公式为

$$
\left.
\begin{array}{l}
\zeta_A = [2304''.250 + 1''.396(T-0.5)]t + 0''.302t^2 + 0''.018t^3 \\
z_A = [2304''.250 + 1''.396(T-0.5)]t + 1''.093t^2 + 0''.018t^3 \\
\theta_A = [2004''.682 - 0''.853(T-0.5)]t - 0''.426t^2 - 0''.042t^3
\end{array}
\right\} \quad (4.46)
$$

1967年利斯克(J.H.Lieske)给出的公式为

$$
\left.
\begin{array}{l}
\zeta_A = [2304''.253 + 1''.3972(T-0.5) + 0''.000125(T-0.5)^2]t \\
\qquad + [0''.3023 - 0''.000211(T-0.5)^2]t^2 + 0''.0180t^3 \\
z_A = [2304''.253 + 1''.3972(T-0.5) + 0''.000125(T-0.5)^2]t \\
\qquad + [1''.0949 + 0''.00046(T-0.5)^2]t^2 + 0''.0183t^3 \\
\theta_A = [2004''.684 - 0''.8532(T-0.5) - 0''.000317(T-0.5)^2]t \\
\qquad + [-0''.4266 - 0''.00032(T-0.5)^2]t^2 - 0''.0418t^3
\end{array}
\right\} \quad (4.47)
$$

1975年木下宙(H.Kinoshita)给出的公式为

$$\left.\begin{aligned}\zeta_A &= (2303''.5548 + 1''.39720T + 0''.000059T^2)t + (0''.30242\\&\quad -0''.000269T)t^2 + 0''.017996t^3\\z_A &= (2303''.5548 + 1''.39720T + 0''.000059T^2)t + (1''.09478\\&\quad +0''.000387T)t^2 + 0''.018324t^3\\\theta_A &= (2005''.1125 - 0''.85294T - 0''.000365T^2)t + (-0''.42647\\&\quad -0''.000365T)t^2 - 0''.041802t^3\end{aligned}\right\} \quad (4.48)$$

上述表达式中的T为从1850.0起算的回归世纪数，t为从t_1到t_D的回归世纪数。

下面我们给出建立在IAU1976天文常数系统上的岁差量表达式。每个岁差量的表达式包含不少系数，但实际上表达式中所有的系数都可以由几个天文常数计算出，我们把这几个天文常数称为"基本岁差常数"。表4.2列出了基本岁差常数。基本岁差常数中除P_1和p_g外，都属于IAU1976天文常数系统中的常数。J2000.0的岁差常数p_1值是对纽康的日月岁差值进行了重新测定，并加上了银河系自转的改正值以及在计算行星岁差值采用了新的行星质量数值而得到的。纽康的"岁差常数"P_0是地球惯性矩和地球轨道要素的函数，纽康的"岁差常数"P_0和黄经日月岁差速率有如下关系

$$\psi = \psi_N - p_g = (P_0 + P_1T)\cos\overline{\varepsilon}_A - p_g \quad (4.49)$$

表4.2 岁差量计算中所使用的基本岁差常数

J2000.0的黄赤交角	$\varepsilon_0 = 23°26'21''.448$
J2000.0的黄经总岁差速率	$p_1 = 5029''.0966$/儒略世纪
纽康的"岁差常数"变化速率	$P_1 = -0''.00369$/儒略世纪
测地岁差	$p_g = 1''.92$/儒略世纪
行星质量倒数 M^{-1}	
水星	6023600
金星	408523.5
火星	3098710
木星	1047.355
土星	3498.5
天王星	22869
海王星	19314
冥王星	3000000

其中ψ_N称为牛顿的黄经日月岁差速率，P_1称为纽康的"岁差常数"变化速率，p_g称为测地岁差。p_g是一项小的相对论效应的改正。在相对论理论中，原点在地心的赤道坐标系由于引力场的影响使地球的自转轴绕黄极不断进动，进动的速率即测地岁差，进动的方向和黄经日月岁差运动方向相反。测地岁差和黄经日月岁差速率在观测上不能区分。我们将在第八章第五节中对测地岁差作进一步的讨论。

1984年起岁差和章动的计算中采用标准历元J2000.0，并以儒略世纪为单位，于是有

$$
\left.\begin{aligned}
T &= \frac{\mathrm{JD}(t_s)-\mathrm{JD}(\mathrm{J}2000.0)}{36525} \\
t &= \frac{\mathrm{JD}(t_D)-\mathrm{JD}(t_s)}{36525}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.50)
$$

其中$\mathrm{JD}(t_s)$表示对应于历元为t_s的儒略日。若固定历元取为标准历元J2000.0，则$T=0$，这时岁差位移的表达式成为

$$
\alpha_A = \alpha_1 t + \alpha_1' t^2 + \alpha_1'' t^3 \qquad (4.51)
$$

在图4.8中，设K_0为标准历元时的固定黄极，N为瞬时黄道对固定黄道的升交点，与N相对的N'为降交点。瞬时黄极K_D的位置可以用它在以K_0为原点的直角坐标系的坐标来表示，该坐标系的X轴指向固定平春分点，Y轴指向黄经为90°处。由第一节知$K_DK_0=\pi_A$，$N'\gamma_0=AM=180°-\Pi_A$。严格来说，在直角球面三角形K_0K_DL中有$\sin x=\sin\pi_A\sin\Pi_A$和$\sin y=-\sin\pi_A\cos\Pi_A$。因此黄极$K_D$的坐标为

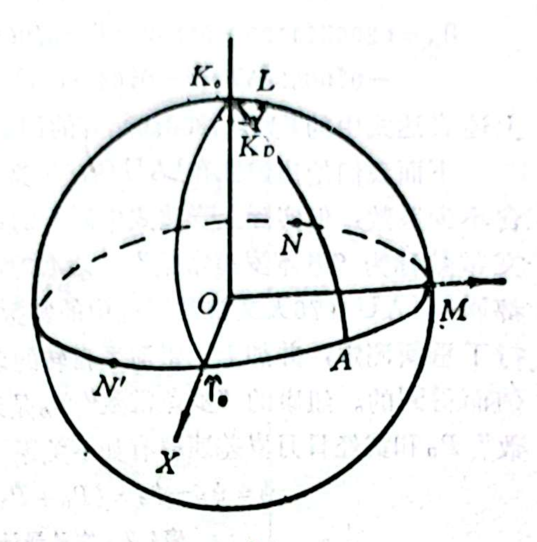


图4.8 瞬时黄极的坐标

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \sin\pi_A\sin\Pi_A \\
y &= -\sin\pi_A\cos\Pi_A
\end{aligned}\right\} \qquad (4.52)
$$

上式右端即黄道面的行星摄动表达式。根据表4.1和（4.51）式其表达形式为

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\pi_A\sin\Pi_A &= s_1 t + s_1' t^2 + s_1'' t^3 \\
\sin\pi_A\cos\Pi_A &= c_1 t + c_1' t^2 + c_1'' t^3
\end{aligned}\right\} \qquad (4.53)
$$

利用表4·2基本岁差常数中的行星质量值，根据行星运动理论，可以求得瞬时黄极对于固定黄极的相对位置的数值表达式中的系数

$$
\left.\begin{aligned}
s_1 &= +4''.1976, & s_1' &= +0''.19447, & s_1'' &= -0''.000179 \\
c_1 &= -46''.8150, & c_1' &= +0''.05059, & c_1'' &= +0''.000060
\end{aligned}\right\} \qquad (4.54)
$$

由这几个系数和表4.2中其余的基本岁差常数ε_0、p_1、P_1、p_g，就能计算出所有岁差量幂级数表达式的系数。

图4.9给出了岁差的极图。图中P_0和K_0为标准历元时的平天极和黄极，P_D和K_D为瞬时的平天极和黄极。图上标出了有关的岁差量。由第一节知，平天极绕黄极运动的线速度为n，其运动方向总是指向该瞬间的平春分点，因此有

$$
\begin{aligned}
P_DP_D' = n\,dt &= \psi\sin\varepsilon_A dt \\
&= [(P_0+P_1t)\cos\varepsilon_A - p_g]\sin\varepsilon_A dt
\end{aligned} \qquad (4.55)
$$

由图4.7的球面三角形$\gamma'\gamma_DN$以及图4.9的球面三角形$P_DP_D'A$和$P_DP_D'B$可导出下列方程

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\omega_A\frac{d\psi_A}{dt} &= [(P_0+P_1t)\cos\varepsilon_A - p_g]\sin\varepsilon_A\cos\chi_A \\
\frac{d\omega_A}{dt} &= [(P_0+P_1t)\cos\varepsilon_A - p_g]\sin\varepsilon_A\sin\chi_A
\end{aligned}\right.
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\theta_A}{dt} &= [(P_0+P_1t)\cos\varepsilon_A - p_e]\cos\varepsilon_A\cos z_A \\
\sin\theta_A\frac{d\zeta_A}{dt} &= [(P_0+P_1t)\cos\varepsilon_A - p_e]\sin\varepsilon_A\sin z_A \\
\frac{d\varepsilon_A}{dt} &= \cos(\wedge_A-\Pi_A)\frac{d}{dt}(\sin\pi_A\cos\Pi_A) - \sin(\wedge_A-\Pi_A)\frac{d}{dt}(\sin\pi_A\sin\Pi_A)
\end{aligned}\right\} \quad (4.56)
$$

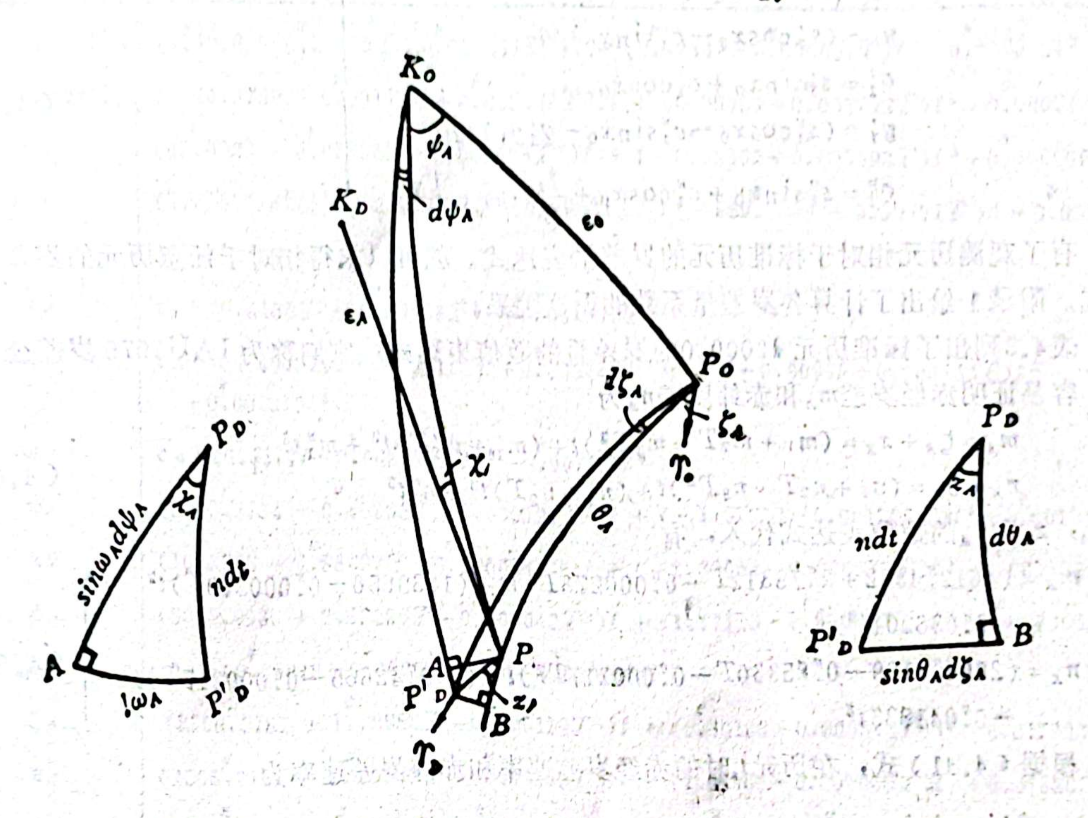


图4.9 平天极绕黄极的运动

其中

$$
\left.\begin{aligned}
\psi_A &= \psi_1 t + \psi_1' t^2 + \psi_1'' t^3 \\
\varepsilon_A &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t + \varepsilon_1' t^2 + \varepsilon_1'' t^3 \\
\chi_A &= \chi_1 t + \chi_1' t^2 + \chi_1'' t^3 \\
\omega_A &= q_1 t + q_1' t^2 + q_1'' t^3 \\
\theta_A &= \theta_1 t + \theta_1' t^2 + \theta_1'' t^3 \\
z_A &= z_1 t + z_1' t^2 + z_1'' t^3 \\
\zeta_A &= \zeta_1 t + \zeta_1' t^2 + \zeta_1'' t^3 \\
p_A &= \wedge_A - \Pi_A = p_1 t + p_1' t^2 + p_1'' t^3
\end{aligned}\right\} \quad (4.57)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\pi_A &= q_1 t + q_1' t^2 + q_1'' t^3 \\
\Pi_A &= x_0 + y_1 t + y_1' t^2
\end{aligned}\right\} \quad (4.58)
$$

将（4.57）式代入到（4.56）式和有关的球面三角公式中，可以求得（4.57）式右端幂级数的所有系数。（4.58）式右端的系数则可以直接用（4.53）式而求出。

由于

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\Pi_A &= \sin x_0 + (y_1\cos x_0)t + (y_1'\cos x_0 - \tfrac{1}{2}y_1^2\sin x_0)t^2 + \cdots \\
\cos\Pi_A &= \cos x_0 - (y_1\sin x_0)t - (y_1'\sin x_0 + \tfrac{1}{2}y_1^2\cos x_0)t^2 + \cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (4.59)
$$

把上式和（4.58）式的π_A代入到（4.53）式，并令t的同次幂相等，就可以确定（4.58）式右端的系数

$$
\left.\begin{aligned}
&\tan x_0 = s_1/c_1 \\
&q_1 = \sqrt{s_1^2 + c_1^2} \\
&y_1 = (s_1'\cos x_0 - c_1'\sin x_0)/q_1 \\
&q_1' = s_1'\sin x_0 + c_1'\cos x_0 \\
&y_1' = (s_1''\cos x_0 - c_1''\sin x_0 - q_1'y_1)/q_1 \\
&q_1'' = s_1''\sin x_0 + c_1''\cos x_0 + \frac{1}{2}q_1y_1^2 + \frac{1}{6}q_1^3
\end{aligned}\right\} \qquad (4.60)
$$

有了观测历元相对于标准历元的岁差量表达式，就可以求得相对于任意历元的岁差量表达式。附录1给出了计算各岁差量系数的循次关系。

表4.3列出了标准历元J2000.0的岁差量的数值表达式，它们称为IAU1976岁差公式。

容易证明赤经岁差m_A和赤纬度差n_A为

$$
\left.\begin{aligned}
m_A &= \zeta_A + z_A = (m_1 + m_2T + m_3T^2)t + (m_1' + m_2'T)t^2 + m_1''t^3 \\
n_A &= \theta_A = (n_1 + n_2T + n_3T^2)t + (n_1' + n_2'T)t^2 + n_1''t^3
\end{aligned}\right\} \qquad (4.61)
$$

将ζ_A，z_A和θ_A的数值表达式代入，有

$$
\left.\begin{aligned}
m_A &= (4612''.4362 + 2''.79312T - 0''.000278T^2)t + (1''.39056 - 0''.000279T)t^2 \\
&\quad + 0''.036201t^3 \\
n_A &= (2004''.3109 - 0''.85330T - 0''.000217T^2)t + (-0''.42665 - 0''.000217T)t^2 \\
&\quad - 0''.041833t^3
\end{aligned}\right\} \qquad (4.62)
$$

根据（4.41）式，在历元t_0时的赤经岁差速率和赤纬岁差速率为

$$
\left.\begin{aligned}
m = \left(\frac{\mathrm{d}m_A}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t=0} &= m_1 + m_2T + m_3T^2 \\
&= (4612''.4362 + 2''.79312T - 0''.000278T^2)/\text{儒略世纪} \\
&= (307^s.49575 + 0^s.186208T - 0^s.0000185T^2)/\text{儒略世纪} \\
n = \left(\frac{\mathrm{d}n_A}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t=0} &= n_1 + n_2T + n_3T^2 \\
&= (2004''.3109 - 0''.85330T - 0''.000217T^2)/\text{儒略世纪}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.63)
$$

若令

$$
\left.\begin{aligned}
m' &= \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2m_A}{\mathrm{d}t^2}\right)\Bigg|_{t=0} \qquad & n' &= \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2n_A}{\mathrm{d}t^2}\right)\Bigg|_{t=0} \\
m'' &= \frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3m_A}{\mathrm{d}t^3}\right)\Bigg|_{t=0} \qquad & n'' &= \frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3n_A}{\mathrm{d}t^3}\right)\Bigg|_{t=0}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.64)
$$

则（4.61）式可改写成

$$
\left.\begin{aligned}
m_A &= mt + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}t^2 + \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}t^3 = mt + m't^2 + m''t^3 \\
n_A &= nt + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}t^2 + \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}t^2}t^3 = nt + n't^2 + n''t^3
\end{aligned}\right\} \qquad (4.65)
$$

由（4.63）和（4.65）式可得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}T} \\
\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}
\end{aligned}\right\} \tag{4.66}
$$

表4.3　岁差量的数值表达式（基本历元J2000.0）

$\sin\pi_A\sin\Pi_A$	$(4''.1976 - 0''.75250T + 0''.000431T^2)t + (0''.19447 + 0''.000697T)t^2 - 0''.000179t^3$
$\sin\pi_A\cos\Pi_A$	$(-46''.8150 - 0''.00117T + 0''.005439T^2)t + (0''.05059 - 0''.003712T)t^2 + 0''.000344t^3$
π_A	$(47''.0029 - 0''.06603T + 0''.000598T^2)t + (-0''.03302 + 0''.000598T)t^2 + 0''.000060t^3$
Π_A	$(174°52'34''.982 + 3289''.4789T + 0''.60622T^2 + (-869''.8089 - 0''.50491T)t + 0''.03536t^2$
ε_0	$23°26'21''.448$
$\overline{\varepsilon}_A$	$\varepsilon_0 - 46''.8150T - 0''.00059T^2 + 0''.001813T^3$
ε_A	$\overline{\varepsilon}_A + (-46''.8150 - 0''.00117T + 0''.005439T^2)t + (-0''.00059 + 0''.005439T)t^2 + 0''.001813t^3$
ω_A	$\overline{\varepsilon}_A + (0''.05127 - 0''.009186T)t^2 - 0''.007726t^3$
ψ_A	$(5038''.7784 + 0''.49263T - 0''.000124T^2)t + (-1''.07259 - 0''.001106T)t^2 - 0''.001147t^3$
χ_A	$(10''.5526 - 1''.88623T + 0''.000096T^2)t + (-2''.38064 - 0''.000833T)t^2 - 0''.001125t^3$
p_A	$(5029''.0966 + 2''.22226T - 0''.000042T^2)t + (1''.11113 - 0''.000042T)t^2 - 0''.000006t^3$
p_N	$p_A + (0''.00048 - 0''.000085T)t^2 - 0''.000107t^3$
ζ_A	$(2306''.2181 + 1''.39656T - 0''.000139T^2)t + (0''.30188 - 0''.000345T)t^2 + 0''.017998t^3$
z_A	$(2306''.2181 + 1''.39656T - 0''.000139T^2)t + (1''.09468 + 0''.000066T)t^2 + 0''.018203t^3$
θ_A	$(2004''.3109 - 0''.85330T - 0''.000217T^2)t + (-0''.42665 - 0''.000217T)t^2 - 0''.041833t^3$

第四节　计算岁差的准确公式

令（α_s，δ_s）为天体相对于t_s时的平赤道坐标，（α_D，δ_D）为天体相对于 t_D时的平赤道坐标，则计算岁差的三阶公式可表示为

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_D &= \alpha_s + \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(t_D - t_s) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}(t_D - t_s)^2 + \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^3\alpha}{\mathrm{d}t^3}(t_D - t_s)^3 \\
\delta_D &= \delta_s + \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}(t_D - t_s) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}t^2}(t_D - t_s)^2 + \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^3\delta}{\mathrm{d}t^3}(t_D - t_s)^3
\end{aligned}\right\} \tag{4.67}
$$

由（4.25）式有

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} &= m + n\sin\alpha\tan\delta \\
\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} &= n\cos\alpha
\end{aligned}\right\} \tag{4.68}
$$

微分上式，可得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \frac{dm}{dt} + \frac{dn}{dt}\sin\alpha\tan\delta + \frac{d\alpha}{dt}n\cos\alpha\tan\delta + \frac{d\delta}{dt}n\sin\alpha\sec^2\delta \\
&= \frac{dm}{dt} + \frac{dn}{dt}\sin\alpha\tan\delta + mn\cos\alpha\tan\delta + n^2\sin2\alpha\left(\frac{1}{2} + \tan^2\delta\right) \\
\frac{d^2\delta}{dt^2} &= \frac{dn}{dt}\cos\alpha - \frac{d\alpha}{dt}n\sin\alpha \\
&= \frac{dn}{dt}\cos\alpha - mn\sin\alpha - n^2\sin^2\alpha\tan\delta
\end{aligned}\right\} \tag{4.69}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d^3\alpha}{dt^3} &= \frac{d^2m}{dt^2} + \frac{d^2n}{dt^2}\sin\alpha\tan\delta + 2\frac{dn}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\cos\alpha\tan\delta + 2\frac{dn}{dt}\frac{d\delta}{dt}\sin\alpha\sec^2\delta \\
&\quad + 2\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\delta}{dt}n\cos\alpha\sec^2\delta - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 n\sin\alpha\tan\delta + 2\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 n\sin\alpha\sec^2\delta \\
&\quad \tan\delta + \frac{d^2\alpha}{dt^2}n\cos\alpha\,\mathrm{tad}\delta + \frac{d^2\delta}{dt^2}n\sin\alpha\sec^2\delta \\
\frac{d^3\delta}{dt^3} &= \frac{d^2n}{dt^2}\cos\alpha - 2\frac{dn}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\sin\alpha - \frac{d^2\alpha}{dt^2}n\sin\alpha - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 n\cos\alpha
\end{aligned}\right\} \tag{4.70}
$$

赤经和赤纬的二阶导数叫做岁差引起的赤经和赤纬的长期变化。m和n的数值可以有（4.63）式计算。它们对 t 的一阶和二阶导数可以根据（4.66）和（4.63）式求得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dm}{dt} &= (2.''79312 - 0.''000556T)/(\text{儒略世纪})^2 \\
&= (0.^s186208 - 0.^s0000370T)/(\text{儒略世纪})^2 \\
\frac{dn}{dt} &= (-0.''85330 - 0.''000434T)/(\text{儒略世纪})^2
\end{aligned}\right\} \tag{4.71}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d^2m}{dt^2} &= -0.''000556/(\text{儒略世纪})^3 = -0.^s0000370/(\text{儒略世纪})^3 \\
\frac{d^2n}{dt^2} &= -0.''000434/(\text{儒略世纪})^3
\end{aligned}\right\} \tag{4.72}
$$

赤经和赤纬的三阶导数的式子（4.70）式较长，使用它们比较麻烦。

使用直角坐标系的位置单位矢量和旋转矩阵将能给出岁差计算的严格公式。

在图4.10中，设P_s，$Q_sQ'_s$，γ_s为t_s时的平极，平赤道和平春分点；它们在t_D时的位置移至P_D，$Q_DQ'_D$，γ_D。天体在这两个平赤道坐标系中方向的单位矢量分别为

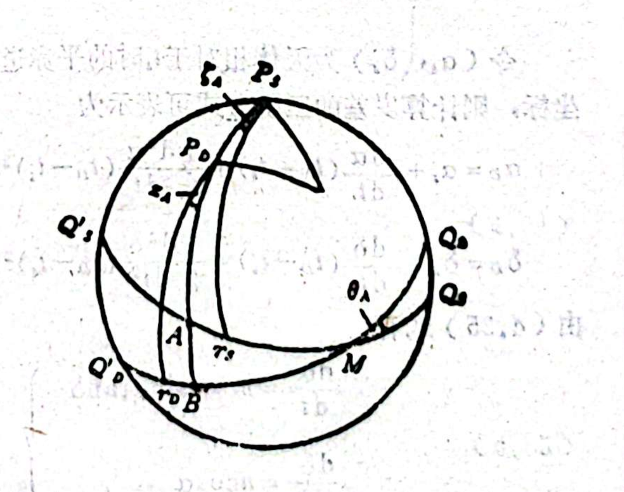


图4.10　三个赤道岁差参数

$$
\left.\begin{aligned}
\vec{S}(\alpha_s,\ \delta_s) &= \begin{pmatrix} \cos\delta_s\cos\alpha_s \\ \cos\delta_s\sin\alpha_s \\ \sin\delta_s \end{pmatrix} \\
\vec{S}(\alpha_D,\ \delta_D) &= \begin{pmatrix} \cos\delta_D\cos\alpha_D \\ \cos\delta_D\sin\alpha_D \\ \sin\delta_D \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{4.73}
$$

P_sP_D是连接P_s和P_D的大圆（不是平极运动的路径），将P_sP_D延长后分别与Q_sQ_s'和Q_DQ_D'交于A，B两点。作大圆$P_s\gamma_s$和$P_D\gamma_D$，显然在天球上对应的三个赤道岁差参数为

$$
\left.\begin{aligned}
\zeta_A &= \angle AP_s\gamma_s = A\gamma_s \\
z_A &= \angle \gamma_DP_DB = \gamma_DB \\
\theta_A &= \angle AMB = P_sP_D
\end{aligned}\right\} \tag{4.74}
$$

若两个赤道相交于M点，显然M是大圆P_sP_DAB的极，有$\gamma_sM = 90° - \zeta_A$，$\gamma_DM = 90° + z_A$。

利用旋转矩阵可以得到$\vec{S}(\alpha_s,\ \delta_s)$同$\vec{S}(\alpha_D,\ \delta_D)$的关系

$$
\begin{aligned}
\vec{S}(\alpha_D,\ \delta_D) &= R_Z(-z_A)R_Y(\theta_A)R_Z(-\zeta_A)\vec{S}(\alpha_S,\ \delta_S) \\
&= P\vec{S}(\alpha_S,\ \delta_S)
\end{aligned} \tag{4.75}
$$

其中P称为岁差矩阵，可表示为

$$
P = R_Z(-z_A)R_Y(\theta_A)R_Z(-\zeta_A) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \tag{4.76}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
P_{11} &= \cos\zeta_A\cos z_A\cos\theta_A - \sin\zeta_A\sin z_A \\
P_{12} &= -\sin\zeta_A\cos z_A\cos\theta_A - \cos\zeta_A\sin z_A \\
P_{13} &= -\cos z_A\sin\theta_A \\
P_{21} &= \cos\zeta_A\sin z_A\cos\theta_A + \sin\zeta_A\cos z_A \\
P_{22} &= -\sin\zeta_A\sin z_A\cos\theta_A + \cos\zeta_A\cos z_A \\
P_{23} &= -\sin z_A\sin\theta_A \\
P_{31} &= \cos\zeta_A\sin\theta_A \\
P_{32} &= -\sin\zeta_A\sin\theta_A \\
P_{33} &= \cos\theta_A
\end{aligned}\right\} \tag{4.77}
$$

（4.75）式也可写成

$$
\left.\begin{aligned}
\cos\delta_D\cos(\alpha_D - z_A) &= \cos\theta_A\cos\delta_S\cos(\alpha_S + \zeta_A) - \sin\theta_A\sin\delta_S \\
\cos\delta_D\sin(\alpha_D - z_A) &= \cos\delta_S\sin(\alpha_S + \zeta_A) \\
\sin\delta_D &= \sin\theta_A\cos\delta_S\cos(\alpha_S + \zeta_A) + \cos\theta_A\sin\delta_S
\end{aligned}\right\} \tag{4.78}
$$

（4.78）式也可由图4.10的球面三角形$P_SP_D\sigma$利用正弦公式，余弦公式和五元素公式求得。（4.75）和（4.78）式是计算岁差的准确公式。式中的三个赤道岁差参数ζ_A、z_A和θ_A的数值可由表4.3给出的表达式计算得到。

若由标准历元t_0时天体的平赤道坐标（α_0，δ_0）计算t_D时的平赤道坐标（α_D，δ_D），这时$T = 0$，于是三个赤道岁差参数为

$$
\left.\begin{aligned}
\zeta_A &= 2306''.2181t + 0''.30188t^2 + 0''.017998t^3 \\
z_A &= 2306''.2181t + 1''.09468t^2 + 0''.018203t^3 \\
\theta_A &= 2004''.3109t - 0''.42665t^2 - 0''.041833t^3
\end{aligned}\right\} \tag{4.79}
$$

使用J2000.0作为标准历元，对目前的观测历元，t为负值，因而由（4.79）式求得的三个赤道岁差参数也是负值，虽然与图4.10的情况不一致，但并不影响（4.75）和（4.78）式的形式。

由历元t_D到历元t_s的反向岁差变换，则根据（4.75）式立即可得

$$
\vec{S}(\alpha_s,\ \delta_s) = P^{-1}\vec{S}(\alpha_D,\ \delta_D) = P^T\vec{S}(\alpha_D,\ \delta_D) \tag{4.80}
$$

不需要对岁差矩阵P求逆，只要计算它的转置矩阵就可。

ζ_A，z_A，θ_A都是小量，（4.77）式中若忽略二级以上小量，则岁差矩阵P可简写成

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & -\zeta_A - z_A & -\theta_A \\ \zeta_A + z_A & 1 & 0 \\ \theta_A & 0 & 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & -m_A & -n_A \\ m_A & 1 & 0 \\ n_A & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.81}
$$

利用（4.65）式，岁差矩阵P还可进一步简写成

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & -mt & -nt \\ mt & 1 & 0 \\ nt & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.82}
$$

这时（4.74）式可改写为

$$
\vec{S}(\alpha_D,\ \delta_D) = R_Y(n_A)R_Z(-m_A)\vec{S}(\alpha_s,\ \delta_s) \tag{4.83}
$$

或

$$
\vec{S}(\alpha_D,\ \delta_D) = R_Y(nt)R_Z(-mt)\vec{S}(\alpha_s,\ \delta_s) \tag{4.84}
$$

对由历元t_0到历元t_D的岁差变换，则

$$
\vec{S}(\alpha_D,\ \delta_D) = R_Y(n_1t)R_Z(-m_1t)\vec{S}(\alpha_0,\ \delta_0) \tag{4.85}
$$

第五节　章　　动

产生日月岁差的原因是日月引力对旋转着的地球的赤道隆起部分的摄动，而章动是由于这种摄动作用的大小和方向在某种范围内发生变化而产生的。

实际的天极在天球上运动很复杂，因此人为地把它分解成两种运动，其中真天极绕平天极周期性的运动称为章动。其主要项与月球轨道升交点黄经有关，周期为18.6年。其它项是太阳和月球的平黄经、平近点角以及月球轨道升交点黄经的组合。

在图4.11中，设K，P和P'分别为某一瞬间的北黄极，平极和真极，γ和γ'为平春分点和真春分点。平赤道和黄道的夹角ε叫平黄赤交角，真赤道和黄道的夹角$\varepsilon' = \varepsilon + \Delta\varepsilon$叫真黄赤交角。当真极绕平极作周期运动时，真春分点相对于平春分点、真赤道相对平赤道都作相应的运动，黄赤交角也有周期性的变化。若令$\Delta\psi$表示自真春分点起量的平春分点的黄经即

$\Delta\psi=\gamma'\gamma=\angle P'KP$，则$\Delta\psi$、$\Delta\varepsilon$的变化直接反映了真极对平极的运动情况，因此可以用这两个量表征真极的章动运动。$\Delta\psi$叫做黄经章动，$\Delta\varepsilon$叫做交角章动。交角章动的主章动项称为章动常数，常用N表示。若忽略掉短周期的微小运动，用主章动项来表示章动，显而易见真极绕平极运动轨迹描绘出一个椭圆，这个椭圆称为章动椭圆。椭圆的中心为平极，椭圆的长轴指向黄极方向，短轴指向春分点方向。章动常数在几何意义上就代表章动椭圆的半长轴。

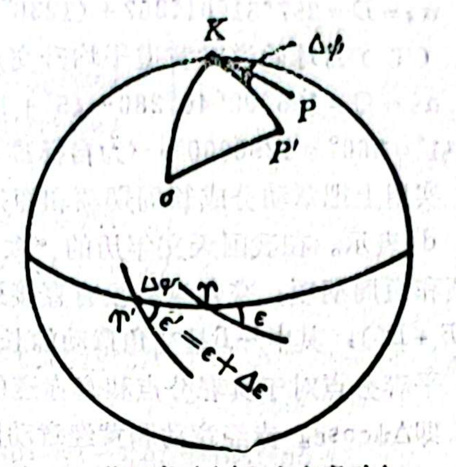


图4.11　黄经章动$\Delta\psi$和交角章动$\Delta\varepsilon$

过去所用的章动理论是伍拉德（E.W.Woolard）在1953年建立的，它是以刚体地球模型为基础的。伍拉德给出了黄经章动$\Delta\psi$和交角章动$\Delta\varepsilon$的表达式，包含周期从5.5日到6798.4日（18.6年）的系数大于0″.0002的项，$\Delta\psi$有69项，$\Delta\varepsilon$有40项。由于地球并非刚体，地球的非刚性对章动在观测上有很大的影响，因此章动常数的观测值与理论值之间有相当大的差异，

1984年起采用的是IAU1980章动理论，它是基于瓦尔（J.Wahr）和木下宙的工作得出的。IAU1980章动理论可简单描述如下：

（1）使用地球的轴对称非刚体模型1066A，该地球模型计及潮汐形变，具有弹性地幔及液体外核和固体内核；

（2）章动常数同IAU1976天文常数系统一致，并与不同类型和方法所得的观测数据相一致；

（3）章动计算所选用的参考极使其相对于空固参考系或地球参考系（参阅第六节）无周日或准周日的运动。新的章动理论包括所有外部的受迫运动，但并不包括地球物理（地球内部引起的）的运动或自由运动，新的参考极称为天球历书极，简称CEP。

IAU1980章动理论给出了包含周期从4.7天到6798.4天（18.6年）的系数大于0″.0001共106项。附录2给出IAU1980章动序列表。黄经章动$\Delta\psi$和交角章动$\Delta\varepsilon$的表达式为

$$\left.\begin{aligned}\Delta\psi&=\sum_{j=1}^{106}[(A_{0j}+A_{1j}t)\sin(\sum_{i=1}^{5}k_{ji}\alpha_i(t))]\\ \Delta\varepsilon&=\sum_{j=1}^{106}[(B_{0j}+B_{1j}t)\cos(\sum_{i=1}^{5}k_{ji}\alpha_i(t))]\end{aligned}\right\}\tag{4.86}$$

其中A_{0j}，A_{1j}，B_{0j}，B_{1j}，k_{ji}的值给出在章动序列表中。五个基本变量是

（1）月球的平近点角

$$\alpha_1=l=134°57'46''.733+(1325^r+198°52'02''.633)t+31''.310t^2+0''.064t^3\tag{4.87}$$

（2）太阳的平近点角

$$\alpha_2=l'=357°31'39''.804+(99^r+359°03'01''.224)t-0''.577t^2-0''.012t^3\tag{4.88}$$

（3）月球平升交角距

$$\alpha_3=F=93°16'18''.877+(1342^r+82°01'03''.137)t-13''.257t^2+0''.011t^3\tag{4.89}$$

（4）日月平角距

$$\alpha_4 = D = 297^\circ 51' 01''.307 + (1236^r + 307^\circ 06' 41''.328)t - 6''.891t^2 + 0''.019t^3 \quad (4.90)$$

（5）月球轨道对黄道平均升交点的黄经

$$\alpha_5 = \Omega = 125^\circ 02' 40''.280 - (5^r + 134^\circ 08' 10''.539)t + 7''.455t^2 + 0''.008t^3 \quad (4.91)$$

其中$1^r = 360^\circ = 1296000''$，$t$为自标准历元J2000.0起算的儒略世纪数。

实用上把章动分成长周期项和短周期项，周期小于35天的称为短周期项，短周期项以$d\psi$，$d\varepsilon$表示。在我国天文年历的"太阳表"中给出了每天地球力学时0^h的黄经章动的长周期项和短周期项；交角章动没有直接列出，交角章动为天文年历的"贝塞耳日数"表中的$-(B+B')$，其中$-B$是交角章动的长周期项，$-B'$是短周期项。

平春分点对于真春分点和真赤道的赤经叫做赤经章动，它等于黄经章动在赤道上的分量，即$\Delta\psi\cos\varepsilon$。赤经章动和黄经章动同样分为长周期项和短周期项，长周期项变化在$\pm1^s.2$之间，短周期项变化在$\pm0^s.02$之间。在天文年历的"世界时和恒星时表"中给出了每天世界时0^h的赤经章动，它包含了短周期项在内，在天文年历的"恒星视位置表"中，恒星的视赤经和视赤纬是按每10天间隔给出，它们没有包含章动的短周期项，这是因为短周期项变化较快，不可能进行有效的内插。

章动是同一时刻平坐标和真坐标的变换。章动影响天体的黄经，赤经，赤纬和黄赤交角，但对天体的黄纬没有影响。对（4.2）和（4.3）式分别求微分，并考虑到$d\lambda = \Delta\psi$，$d\varepsilon = \Delta\varepsilon$，$d\beta = 0$，有

$$\cos\delta\sin\alpha d\alpha = \cos\beta\sin\lambda\Delta\psi - \cos\alpha\sin\delta d\delta \quad (4.92)$$

$$\cos\delta d\delta = -(\sin\varepsilon\sin\beta + \cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda)\Delta\varepsilon + \sin\varepsilon\cos\beta\cos\lambda\Delta\psi \quad (4.93)$$

将（4.9）和（4.12）式代入（4.93）式，得

$$d\delta = \sin\varepsilon\cos\alpha\Delta\psi + \sin\alpha\Delta\varepsilon \quad (4.94)$$

将（4.4）和（4.94）式代入（4.92）式，得

$$d\alpha = (\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta)\Delta\psi - \cos\alpha\tan\delta\Delta\varepsilon \quad (4.95)$$

（4.94）和（4.95）式是章动对赤经和赤纬影响的一阶公式。

使用直角坐标系的位置单位矢量和旋转矩阵能给出章动计算的严格公式。天体在真赤道坐标系和平赤道坐标系中方向的单位矢量分别为

$$\vec{S}(\alpha',\delta') = \begin{pmatrix} \cos\delta'\cos\alpha' \\ \cos\delta'\sin\alpha' \\ \sin\delta' \end{pmatrix}, \quad \vec{S}(\alpha,\delta) = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

利用旋转矩阵可以得到$\vec{S}(\alpha,\delta)$和$\vec{S}(\alpha',\delta')$的关系

$$\vec{S}(\alpha',\delta') = R_x(-\varepsilon-\Delta\varepsilon)R_z(-\Delta\psi)R_x(\varepsilon)\vec{S}(\alpha,\delta) = N\vec{S}(\alpha,\delta) \quad (4.97)$$

其中N称为章动矩阵，可表示为

$$N = R_x(-\varepsilon-\Delta\varepsilon)R_z(-\Delta\psi)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} n_{11} &= \cos\Delta\psi \\ n_{12} &= -\sin\Delta\psi\cos\varepsilon \\ n_{13} &= -\sin\Delta\psi\sin\varepsilon \end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
n_{21} &= \sin\Delta\psi\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon) \\
n_{22} &= \cos\Delta\psi\cos\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)+\sin\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon) \\
n_{23} &= \cos\Delta\psi\sin\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)-\cos\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon) \\
n_{31} &= \sin\Delta\psi\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon) \\
n_{32} &= \cos\Delta\psi\cos\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)-\sin\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon) \\
n_{33} &= \cos\Delta\psi\sin\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)+\cos\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)
\end{aligned}\right\} \tag{4.99}
$$

ε为平黄赤交角，由表4.3得

$$
\varepsilon = 23^\circ 26' 21''.448 - 46''.8150t - 0''.00059t^2 + 0''.001813t^3 \tag{4.100}
$$

（4.97）式也可写成

$$
\left.\begin{aligned}
\cos\delta'\cos\alpha' &= \cos\Delta\psi\cos\delta\cos\alpha - \sin\Delta\psi\cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha - \sin\Delta\psi\sin\varepsilon\sin\delta \\
&= \cos\beta\cos(\lambda+\Delta\psi) \\
\cos\delta'\sin\alpha' &= \sin\Delta\psi\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\cos\delta\cos\alpha + [\cos\Delta\psi\cos\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon) \\
&\quad + \sin\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)]\cos\delta\sin\alpha + [\cos\Delta\psi\sin\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon) \\
&\quad - \cos\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)]\sin\delta \\
&= -\sin\beta\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon) + \cos\beta\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\sin(\lambda+\Delta\psi) \\
\sin\delta' &= \sin\Delta\psi\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\cos\delta\cos\alpha + [\cos\Delta\psi\cos\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon) \\
&\quad - \sin\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\cos\delta\sin\alpha + [\cos\Delta\psi\sin\varepsilon\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon) \\
&\quad + \cos\varepsilon\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon)]\sin\delta \\
&= \sin\beta\cos(\varepsilon+\Delta\varepsilon) + \cos\beta\sin(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\sin(\lambda+\Delta\psi)
\end{aligned}\right\} \tag{4.101}
$$

（4.101）式也可由图4.11的球面三角形$KP'\sigma$利用正弦公式，余弦公式和五元素公式求得。（4.97）和（4.101）式是计算章动的准确公式。

$\Delta\psi$和$\Delta\varepsilon$是小量，（4.99）式中若忽略二级以上小量，则章动矩阵N可简写成

$$
N = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\mu & -\Delta\nu \\ \Delta\mu & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\nu & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \tag{4.102}
$$

其中$\Delta\mu = \Delta\psi\cos\varepsilon$。$\Delta\nu = \Delta\psi\sin\varepsilon$。这时（4.97）式可改写为

$$
\vec{S}(\alpha',\delta') = R_X(-\Delta\varepsilon)R_Y(\Delta\nu)R_Z(-\Delta\mu)\vec{S}(\alpha,\delta) \tag{4.103}
$$

若采用赤道直角坐标的形式，上式可写为

$$
\left.\begin{aligned}
dx &= x' - x = -y\cos\varepsilon\Delta\psi - z\sin\varepsilon\Delta\psi \\
dy &= y' - y = x\cos\varepsilon\Delta\psi - z\Delta\varepsilon \\
dz &= z' - z = x\sin\varepsilon\Delta\psi + y\Delta\varepsilon
\end{aligned}\right\} \tag{4.104}
$$

其中（x，y，z）和(x'，y'，z')分别为天体在平赤道坐标系和真赤道坐标系的直角坐标。

第六节　地球参考系和极移

天文学的原始信息是根据地球上天文台站的观测获得的，而地球在空间以复杂的方式运动着。在建立天球参考系时，拥有关于地球及其运动的精确资料是非常重要的。为了要描述地球的几何和动力学特性，有必要很好定义一个参考系——地球参考系，它将按某种方式与

地面上的观测台站相联结，并且随地球一起运动和旋转，由于它"固定"在地球上，因此也称为地固坐标系。

尽管有许多方法来模拟地球的运动和形变，并且这些模型还在不断地改进，但由于地球的运动和形变极其复杂，因此理想的地球参考系还无法真正建立。与协议的准惯性参考系一样，引入"协议的地球参考系"来近似地体现理想的地球参考系，简称CTRS。

协议的地球参考系的建立和保持必须依赖于天文台的长期天文观测，它可以用地球表面一组测站的位置矢量(也称站矢量)来体现。在具体实现CTRS时，需用一定的仪器观测一定的天体来测定站矢量，因此CTRS不仅与站矢量有关，还依赖于仪器和源矢量，这就是说地球参考系必须与天球惯性参考系相联系。因观测对象的不同，存在三类站矢量，它们是：测站的铅垂线方向，测站的地心向径方向，测站间的基线方向。

测站的铅垂线方向是用地面光学天体测量仪器观测恒星测定的。这类仪器用来测定地方铅垂线在天球上的位置，即天顶的赤经和赤纬，同时利用天球参考系里的恒星位置把位于地球上不同地方的天顶方向联系起来。天顶方向在地球参考系中的坐标是天文经度和天文纬度。这样就形成了地球参考系的地面网络。

地心到地面测站的向径方向是用激光测月（LLR）、激光测卫（SLR）、全球定位系统（GPS）等新技术测定的，所测量的是月球或地球人造卫星按动力学规律的运动，这是一种动力学的测量。测站位置是地心经度和地心纬度，或地球质心为原点的直角坐标。由于与地球相连接，因而能真正表示地球表面一点的位置。

测站间的基线方向是用VLBI技术对河外射电源进行观测测定的。用VLBI观测虽不能直接和地心相联系，但通过基线矢量可把CTRS和CIRS联系起来，在测定基线矢量坐标和源坐标同时可以改进测站在CTRS中的位置。

国际上曾采用1968BIH系统来定义CTRS，它是由地面上68台光学天体测量仪器的铅垂线方向确定的。这个系统的Z轴是指向国际习用原点，简称CIO，它是由五个国际纬度服务(ILS)台站在1900—1905年期间所采用的平纬定义的，零经圈为通过CIO赤道上的平均天文台，即参加BIH的测时台站的经度采用值所对应的经度起算点，零经圈很接近于格林尼治子午圈，坐标系为右旋，坐标系的原点在地球质心，七十年代起维持这个坐标系的天文观测方法已被许多新技术所代替，因此1984年BIH建立了新的系统，它完全采用新技术（即VLBI，SLR，LLR，GPS等）来测定，并同测站的地心向径方向和测站间基线方向相联系。为保持系统的稳定和连续，这个坐标系的原点和轴的指向继续采用1968BIH系统。利用这些新技术对台站坐标定期地重复测定，计算出这些台站坐标随时间的变化。这个系统称为BIH地球参考系，简称BTS。由于定义CIO的五个ILS台站本身存在长期漂移，另外长期以来坐标系的Z轴是按BIH和国际极移服务（IPMS）发布的地极坐标来定义，而这两个系统相对于五个ILS站的系统都存在系统漂移，因此CIO的确切定义不能继续维持。

1988年起IERS用一组台站的地心直角坐标X，Y，Z来定义CIRS。它在1984.0时和BTS的定向是一致的。台站的位置可表示为

$$\vec{R}(t)=\vec{R}_0+\dot{\vec{R}}(t-t_0)+\sum_i \Delta\vec{R}_i(t) \tag{4.105}$$

其中$\vec{R}_0$为历元t_0时的位置，$\dot{\vec{R}}_0$为历元t_0时的速度，包括板块运动和冰后期回弹等，$\Delta\vec{R}_i$为随

时间变化的其它效应的改正，包括固体潮位移，海洋负载和大气负载。对$\vec{R}_0$和$\Delta\vec{R}_i$都已建立了很好的模型。根据台站坐标随时间的变化，通过旋转参数和平移参数的变换可以推算出坐标系的极和零经圈。在计算时假设坐标系相对地壳没有整体的旋转和平移。台站位置的地理坐标，则使用相对GRS80参考椭球（参见表2.1）。目前IERS给出的CTRS的极和零经圈同BTS对应的方向两者一致性在±0.″005，CTRS的极和CIO间连接的不确定性是±0.″03。

建立全球性的地球参考系要把各种技术、各个台站网络的结果统一起来，尽可能消除单个网络的局部性影响，为此要确定地球参考系与它们之间的联系，实现相互之间的转换，全球参考系与局部参考系之间的转换关系和（2.71）式类同，即

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + (1+d)R_X(r_1)R_Y(r_2)R_Z(r_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4.106}$$

其中（x,y,z）为台站在全球参考系中的坐标，（x_s,y_s,z_s）为台站在局部参考系中的坐标，（Δx，Δy，Δz）为局部参考系相对全球参考系的原点位置，d为尺度的变化，r_1，r_2，r_3分别为绕着X，Y，Z轴的旋转量。

由观测发现，地球表面的地理坐标是随时间而变的。地理坐标的变化可能有几种原因，但地球瞬时自转轴位置的改变是最主要的。瞬时自转轴与地球表面的交点称为瞬时自转极。瞬时自转轴在地球本体内运动，使得瞬时自转极在地球表面作相应的位移，这就是极移，也称摆动。

产生极移的原因是相当复杂的。极移的主要部分是由于地球瞬时自转轴和它的惯量椭球的最短惯量主轴不重合引起的。早在18世纪，欧拉(L.Euler)假设地球为一个绝对刚体和旋转椭球体，从理论上证明地球自转轴在其本体内是移动的，并且计算出运动的周期为305天。由于地极的这种运动是在没有外力作用的情况下产生的，也称为自由极移。地球实际上并不是一个绝对刚体，这使得地极自由极移的周期比理论上推导出来的欧拉周期要大得多。由纬度观测资料分析求得这个周期约为14个月或1.2年。因为它首先由美国天文学家钱德勒（S.Chandler）所发现，所以又把地球的自由极移称为钱德勒极移，相应的周期为钱德勒周期。由于地球内部复杂的地球物理过程，钱德勒极移的周期和振幅都呈现出复杂的变化。除了钱德勒极移外地极还存在着一种周年运动，这种运动是由地球表面和大气层内发生的季节性气象过程造成的。地极的这种周年运动是由外部力量引起的，因此也称为周年受迫极移。自由极移和周年受迫极移是地极运动的主要成分，此外还存在一些短周期和长周期的成分，前者包括由地球液核引起的周期近于一日的近周日自由极移和由日月引力引起的周日受迫极移，后者是指地极的长期运动和周期为二、三十年的长周期运动。

由观测资料表明，地极在约0.″8×0.″8（相当于24米×24米）的范围内运动，这一范围相对于整个地球表面而言是很微小的。因此可以取一个通过地极轨线的中心与地球表面相切的平面来代替这一范围的球面。在此平面上取一直角坐标系来描述地极运动。在图4.12中，设P_0表示地极在某一时期内的平均位置，亦即地极轨线的中心，这一点称为平均极，简称平极。以平极P_0作为直角坐标系的原点，由平极指向格林尼治子午线方向为X轴的正向，格林尼治子午线以西90°的子午线方向为Y轴的正向。P表示地极的瞬时位置，简称瞬时极。由图看出，瞬时极P的位置可用其相对平极P_0的直角坐标（x，y）或极坐标（ρ，θ）来表示。

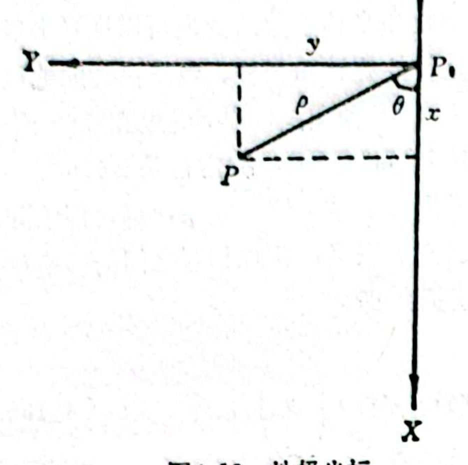


图4.12　地极坐标

(x, y)称为地极坐标，ρ称为极距，θ称为位置角，它们间满足关系

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\rho \end{aligned}\right\} \quad (4.107)$$

地极坐标(x, y)与世界时一样，是研究地球自转的重要基本参数。由于IAU1980章动理论中选用天球历书极作为参考极，目前地极坐标(x, y)实际上是天球历书极相对CTRS极的直角坐标。天球历书极实质上是地球角动量轴（与地球自转轴十分接近）在消除周日周期分量后投影在天球上的极，因此极移中不包含周日周期的受迫成分。

地极运动使地面点的经度和纬度产生相应的变化，容易得到地极运动引起的经度变化和纬度变化分别为

$$\left.\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda-\lambda_0 = (x\sin\lambda_0+y\cos\lambda_0)\tan\varphi_0 \\ \Delta\varphi &= \varphi-\varphi_0 = x\cos\lambda_0-y\sin\lambda_0 \end{aligned}\right\} \quad (4.108)$$

其中(λ, φ)和(λ_0, φ_0)分别为相对于P和P_0的经度和纬度。

地极运动与岁差章动是既有区别又有联系的两种现象。前者是地球自转轴在地球本体内的运动，后者是地球自转轴在空间的运动。当我们在地球上看地极运动时（假设瞬时自转极有某种可识的标志），可以看到瞬时自转极在地面上作近似园周运动。在图4.13(a)中，假设瞬时极圆运动中心P_0是地面上的固定点，取这一点为参考点。设从瞬间t_1至t_2，瞬时极从地面上的P_1点移动到位于直径另一端的P_2点。图4.13(b)画出在瞬间t_1从空间看到的地球。K指向北黄极，P指向北天极，O为地球质心，ε为黄赤交角。OP与地面交点为P_1，地面上的固定点P_0在P_1的左侧（对照图4.13(a)）。到了t_2瞬间，由于岁差，地球自转轴CF对黄极K

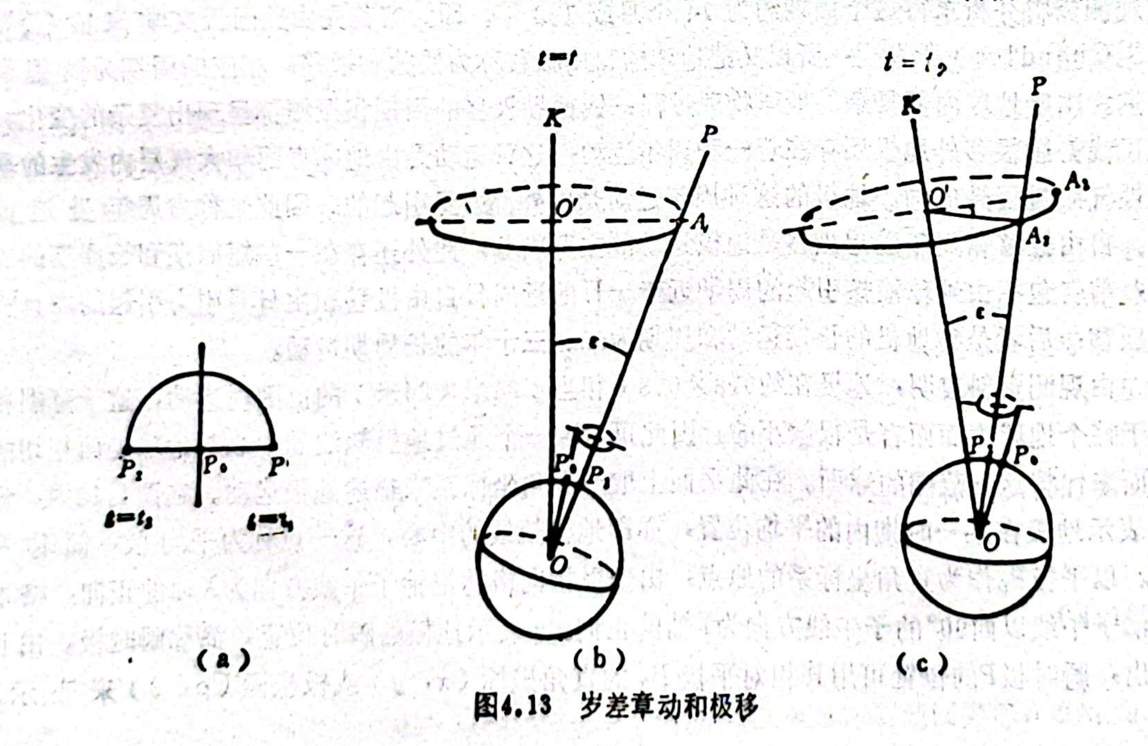


图4.13　岁差章动和极移

绕过一微角$\angle A_1O'A_2$，如图4.13(c)，而地球本体在空间对于OP轴作了晃动，以致OP与地面的交点成为地面上的P_2点。地面上固定点P_0在P_2右侧。假定OP_0为地球内的一根固定轴线，在空间将看到OP_0轴较快地（周期约1.2年）绕缓慢移动的OP轴（周期约25800年）旋转。因此如果从空间来看地球的自转运动，除了看到岁差章动现象之外，还可以看到地球本体对于自转轴的这种晃动。

如果不考虑恒星自行，岁差章动引起恒星坐标的变化是天球坐标系（如赤道坐标系）本身变化的结果。而地球相对于瞬时自转轴的晃动将使观测者的天顶在恒星之间作微小的位移，即恒星的天顶距产生了相应的变化。因此，岁差章动使天极在天球上的位置发生变化，极移则使天顶在天球上的位置发生变化。

地球自转参数是由世界时UT1和地极坐标（x，y）来表示，再加上岁差章动，就能完整地描述地球自转的状态。地球自转参数直接反映了地面观测站在空间的位置以及地球参考系在空间的指向，地球自转参数起着在天球惯性参考系和地球参考系之间的转换参数的作用。

CIRS和CTRS的实现必须进行某一类天体的地面观测，而天体和测站的位置分别参考于CIRS和CTRS，因此需要建立它们之间的联系。

CIRS和CTRS之间的联系是通过下列旋转而建立的

$$[\mathrm{CTRS}] = WSNP\,[\mathrm{CIRS}] \tag{4.109}$$

其中［CIRS］和［CTRS］分别表示天体在CIRS和CTRS中方向的单位矢量，P为岁差矩阵，N为章动矩阵，S为周日自转矩阵，W为极移矩阵。CIRS的原点取在太阳系质心，因此转换还应该包括光行差、视差等影响，这里没有考虑这些影响。

岁差矩阵P和章动矩阵N的表达式分别为（4.76）和（4.98）式，即

$$P = R_Z(-z_A)R_Y(\theta_A)R_Z(-\zeta_A) \tag{4.110}$$

$$N = R_X(-\varepsilon-\Delta\varepsilon)R_Z(-\Delta\psi)R_X(\varepsilon) \tag{4.111}$$

周日自转矩阵S为

$$S = R_Z(\mathrm{GAST}) \tag{4.112}$$

其中GAST为格林尼治视恒星时，有

$$\mathrm{GAST} = S_G^0 + (1+\mu)\cdot\mathrm{UT1} + \Delta\psi\cos\varepsilon' \tag{4.113}$$

S_G^0为世界时0^h的格林尼治平恒星时，它的表达式为（1.76）式，$(1+\mu)$为恒星时单位与世界时单位的比率，它的表达式为（1.82）式，$\Delta\psi\cos\varepsilon'$为赤经章动，也称二分差。

极移矩阵W为

$$W = R_Y(-x)R_X(-y) \tag{4.114}$$

其中x，y为地极坐标，由IERS提供。

图4.14给出了和天球赤道部分有关的旋转量。

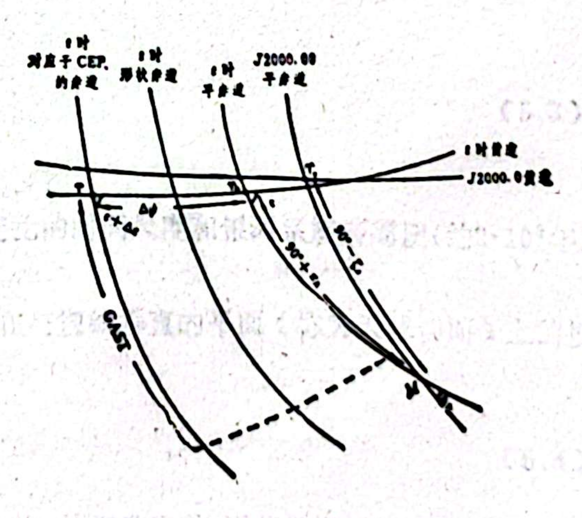


图4.14　和天赤道部分有关的旋转量

第四章　习　　题

1．求出天体位于天球上什么位置，它的赤经和赤纬不受日月岁差影响？

2．一颗恒星处在黄道上，证明由于日月岁差在较短时间间隔内，它的赤经 α、赤纬 δ 和黄经 λ 的变化有下列关系

$$\cos^2\delta\cot\alpha\Delta\alpha=\cot\delta\Delta\delta=\cot\lambda\Delta\lambda。$$

3．证明在较短时间间隔 t 内，有 $mt=\zeta_A+z_A$，$nt=\theta_A$。

4．计算从标准历元J2000.0到观测历元1993.0三个赤道岁差参数 ζ_A，z_A 和 θ_A 的值。

5．一参考星在标准历元时坐标为（α_0，δ_0），在 t 年后测量一邻近天体，它离参考星距离为 $\Delta\alpha$，$\Delta\delta$，证明在标准历元时该邻近天体的坐标（α，δ）为

$$\alpha=\alpha_0+(1-e\tan\delta_0)\Delta\alpha-f\sec^2\delta_0\Delta\delta$$

$$\delta=\delta_0+\Delta\delta+f\Delta\alpha$$

其中

$$e=-(nt+\Delta\psi\sin\varepsilon)\cos\alpha-\Delta\varepsilon\sin\alpha$$

$$f=(nt+\Delta\psi\sin\varepsilon)\sin\alpha-\Delta\varepsilon\cos\alpha。$$

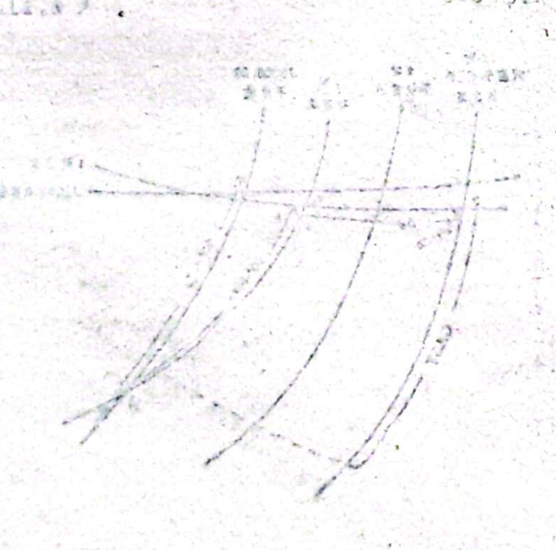
6．假设某颗恒星的赤纬不受岁差的影响，证明该颗恒星所处大圆的极为 $\alpha=-\zeta_A$，$\delta=-\frac{1}{2}\theta_A$ 和 $\alpha=12^h-\zeta_A$，$\delta=\frac{1}{2}\theta_A$。

7．利用旋转矩阵，写出由历元 t_J 的平赤道坐标系到历元 t_D 的平赤道坐标系的三种不同形式的转换表达式。

8．根据球面三角形推导出（4.56）方程式。

9．推导出极移引起经度变化和纬度变化的公式（4.108）。

10．若仅考虑主章动项，章动椭圆的半长轴为 a，半短轴为 b，当白道升交点黄经 $\Omega=0$ 时，真天极的坐标为 $\Delta\psi=0$，$\Delta\varepsilon=a$，写出黄经章动 $\Delta\psi$ 和交角章动 $\Delta\varepsilon$ 以 Ω 为参数的方程。问当 Ω 等于多少时，主章动项对所有恒星的黄纬没有改变？



第五章　恒星的运动

第一节　恒星的空间运动

恒星在宇宙空间遵循着本身固有规律不停地运动着。恒星相对太阳的运动称为恒星的空间运动，其速度称为空间速度。

假设一颗恒星相对于太阳的速度为$\vec{V}$，通常可把它分解为视向速度$\vec{V}_r$和切向速度$\vec{V}_T$两个分量，若恒星的视向方向的单位矢量为$\vec{S}$，有

$$\vec{V}=\vec{V}_r+\vec{V}_T \tag{5.1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\vec{V}_r&=V_r\vec{S}=(\vec{V}\cdot\vec{S})\,\vec{S}\\ \vec{V}_T&=\vec{S}\times(\vec{V}\times\vec{S})\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

恒星的视向速度可以由恒星光谱线的多普勒位移测量得到，而切向速度不能直接测量出，需根据恒星的距离和恒星位置的变化即自行求出。视差的测定可给出恒星的距离，但大部分恒星的视差位移很小，因而存在不确定性。

在图5.1中，设恒星σ离太阳O的距离为r，恒星的运动方向为$\vec{V}$，A点为太阳到恒星运动方向的垂足。令$\angle AO\sigma=\theta$，则视向速度V_r和切向速度V_T可表示为

图5.1　视向速度和切向速度

$$\left.\begin{aligned}V_r&=V\sin\theta=\frac{dr}{dt}\\ V_T&=V\cos\theta=r\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

恒星相对于太阳的速度随时间变化很慢，变化的时间尺度和银河系旋转周期（约2×10^8年）具有相同的量级，因此可把它近似认为是常数。

恒星的自行是恒星在单位时间走过的距离在与视线垂直的平面（称为天球切面）上的投影对观测者所张的角度，有

$$\mu=\frac{d\theta}{dt} \tag{5.4}$$

由（3.35）式知，恒星的距离r可用恒星视差π的倒数表示，因此根据（5·3）式第二式，可得到切向速度V_T与自行μ、恒星视差π之间的关系

$$V_T = \frac{\mu}{\pi} \tag{5.5}$$

其中V_T的单位是天文单位/年，μ与π的单位分是角秒/年和角秒。如果V_T用公里/秒为单位，则（5.5）式改写为

$$V_T = \frac{a}{n}\cdot\frac{\mu}{\pi} = 4.74\frac{\mu}{\pi} \tag{5.6}$$

其中$a = 1.496\times10^8$为1天文单位的公里数，$n = 3.156\times10^7$为一年的秒数。

时间单位用年表示的自行称为恒星的周年自行，也称总自行，它可沿着赤经和赤纬增加的方向分解为μ_α和μ_δ，它们分别称为赤经周年自行和赤纬周年自行。

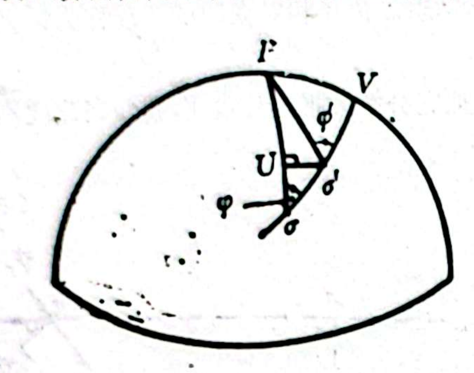


图5.2　自行和方向位置角

在图5.2中，设P为北天极，σ 表示恒星在天球上某一瞬间的位置，σ′为它在dt年以后的位置，因此$\sigma\sigma' = \mu dt$。令$\angle P\sigma\sigma' = \varphi$，则φ称为自行的方向位置角，它的测量方向见图，从0°到360°计量。在不太长的时间(例几百年)内可把恒星的运动轨迹当作为直线，空间运动速度当作为常数，因此恒星的自行总是沿着天球上的大圆。

过σ′作以P为极的小圆弧，与$P\sigma$相交于U。设σ的赤道坐标为（α，δ），σ′的赤道坐标为（α+dα，δ+dδ），则有

$$\left.\begin{aligned} U\sigma' &= d\alpha\cos(\delta+d\delta)\\ U\sigma &= d\delta \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

小三角形$U\sigma\sigma'$可近似认为是平面直角三角形，因此有

$$\left.\begin{aligned} d\alpha\cos\delta &= \mu\, dt\sin\varphi\\ d\delta &= \mu\, dt\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

赤经自行μ_α和赤纬自行μ_δ可近似地认为是

$$\mu_\alpha = \frac{d\alpha}{dt},\quad \mu_\delta = \frac{d\delta}{dt} \tag{5.9}$$

故（5.8）式改写为

$$\left.\begin{aligned} \mu_\alpha &= \mu\sin\varphi\sec\delta\\ \mu_\delta &= \mu\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

其中μ，μ_α，μ_δ的单位是角秒/年。上式也可写成

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \sqrt{(\mu_\alpha\cos\delta)^2+\mu_\delta^2}\\ \tan\varphi &= \mu_\alpha\cos\delta/\mu_\delta \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

总自行μ总取为正的，φ所属的象限由μ_α和μ_δ的符号决定。显然，既可用（μ_α，μ_δ）也可用（μ，φ）来表征自行，它们具有相同的信息量。

切向速度V_T也可沿着赤经和赤纬增加的方向分解为V_α和V_δ。利用（5.6）式可将赤经自行μ_α和赤纬自行μ_δ转化为切向速度的赤经分量V_α和赤纬分量V_δ

$$
\left.\begin{aligned}
V_\alpha &= 4.74\frac{\mu_\alpha\cos\delta}{\pi}\\
V_\delta &= 4.74\frac{\mu_\delta}{\pi}
\end{aligned}\right\}\tag{5.12}
$$

在研究恒星运动学时，常选择银道坐标系。总自行μ也可沿着银经和银纬增加的方向分解为银经自行μ_l和银纬自行μ_b，它们和μ_α，μ_δ的关系为

$$
\left.\begin{aligned}
\mu_l\cos b &= \mu_\alpha\cos\delta\cos\psi+\mu_\delta\sin\psi\\
\mu_b &= \mu_\delta\cos\psi-\mu_\alpha\cos\delta\sin\psi
\end{aligned}\right\}\tag{5.13}
$$

其中ψ是以北银极、北天极和恒星为顶点所组成的球面三角形在恒星处所张的角，称为银道星位角。它规定由银经圈按逆时针方向量到赤经圈，从0°到360°计量。计算ψ的公式是

$$
\cot\psi=\cot i\cos\delta\sec(\alpha-\alpha_N)+\sin\delta\tan(\alpha-\alpha_N)\tag{5.14}
$$

其中i是银道和赤道的交角，α_N是银道对赤道升交点的赤经。

与（5.12）式类似，银经自行μ_l和银纬自行μ_b也可转化为切向速度的银经分量V_l和银纬分量V_b

$$
\left.\begin{aligned}
V_l &= 4.74\frac{\mu_l\cos b}{\pi}\\
V_b &= 4.74\frac{\mu_b}{\pi}
\end{aligned}\right\}\tag{5.15}
$$

恒星在银道直角坐标系中的位置矢量为

$$
\vec{r}=r\vec{S}(l,b)=r\begin{pmatrix}\cos l\cos b\\ \sin l\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}\tag{5.16}
$$

微分上式，可求得恒星的空间速度在银道直角坐标系中的三个分量V_x，V_y和V_z

$$
\left.\begin{aligned}
V_x &= V_r\cos l\cos b-V_l\sin l-V_b\cos l\sin b\\
V_y &= V_r\sin l\cos b+V_l\cos l-V_b\sin l\sin b\\
V_z &= V_r\sin b+V_b\cos b
\end{aligned}\right\}\tag{5.17}
$$

严格讲恒星的空间运动应该在以太阳系质心为原点的参考系中讨论。上面所述的恒星的空间运动虽然是相对太阳的，但给出的公式对太阳系质心也是适用的。太阳系质心和日心间的改正仅仅是一个小量，有时可以不考虑它们间的差异。

第二节　恒星的自行

恒星的自行是很小的，一般小于每年0.″1，只有600多颗恒星的自行等于或大于每年0.″1，蛇夫座中的巴纳德星的自行最大，每年为10.″31。

研究恒星位置及其变化，除考虑恒星所参照的坐标系因岁差原因变化外，还要考虑恒星本身因自行所产生的星位变化。严格讲，自行就是恒星相对天球惯性参考系而产生的位置变化。因此恒星的位置矢量$\vec{r}$通常是由一个位置历元t和一个定向历元T定向的参考系所决定的，它可以写成

$$\vec{r} = \vec{r}(t, T) \tag{5.18}$$

定向历元T的变换（即坐标系的变换）是按岁差来作的；位置历元t的变换则是按自行来作的。

恒星位置随位置历元t的变化通常可表示为泰勒级数，即

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + \frac{d\alpha}{dt}(t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}(t-t_0)^2 + \cdots \\ \delta &= \delta_0 + \frac{d\delta}{dt}(t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dt^2}(t-t_0)^2 + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

其中（α_0，δ_0）为恒星在位置历元t_0时的赤道坐标，（α，δ）为恒星在位置历元t时的赤道坐标。在时间间隔$t-t_0$不太长时（约100年），通常取到二阶项就可满足各种精度的需要。

由（5.9）式知，恒星赤道坐标的一阶导数$\frac{d\alpha}{dt}$和$\frac{d\delta}{dt}$即赤经自行μ_α和赤纬自行μ_δ。恒星赤道坐标的二阶导数实际上是赤经自行和赤纬自行相对于位置历元的一阶导数，即

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\mu_\alpha}{dt}, \qquad \frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d\mu_\delta}{dt} \tag{5.20}$$

它们称为自行的固有变化。

现在来推算因位置历元的变化对赤经自行和赤纬自行影响的表达式。微分（5.10）式，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mu_\alpha}{dt} &= \sin\varphi\sec\delta\frac{d\mu}{dt} + \mu\cos\varphi\sec\delta\frac{d\varphi}{dt} + \mu\sin\varphi\sec\delta\tan\delta\frac{d\delta}{dt} \\ \frac{d\mu_\delta}{dt} &= \cos\varphi\frac{d\mu}{dt} - \mu\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

利用（5.10）式，并考虑到$\frac{d\delta}{dt} = \mu_\delta$，则上式可改写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mu_\alpha}{dt} &= \sin\varphi\sec\delta\frac{d\mu}{dt} + \mu_\delta\sec\delta\frac{d\varphi}{dt} + \mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta \\ \frac{d\mu_\delta}{dt} &= \cos\varphi\frac{d\mu}{dt} - \mu_\alpha\cos\delta\frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

图5.2中若用（α',δ'）表示σ'的赤道坐标。在球面三角形$P\sigma\sigma'$中由正弦公式可得

$$\sin\varphi\cos\delta = \sin\varphi'\cos\delta' \tag{5.23}$$

上式意味着当恒星沿着大圆$\sigma\sigma'V$运动时，量$\sin\varphi\cos\delta$守恒，即

$$\frac{d}{dt}(\sin\varphi\cos\delta) = 0$$

故

$$\frac{d\varphi}{dt} = \tan\varphi\tan\delta\frac{d\delta}{dt} \tag{5.24}$$

利用（5.9）和（5.10）式，上式成为

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mu_\alpha\sin\delta \tag{5.25}$$

微分（5.3）式第二式，可得 (5.26)

$$-V\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{5.27}$$

利用（5.3）式第一式和（5.4）式，上式成为

$$-V\sin\theta\,\mu=V\sin\theta\,\mu+r\frac{d\mu}{dt} \tag{5.28}$$

即

$$\frac{d\mu}{dt}=-2\mu\pi V_r \tag{5.29}$$

将（5.26）和（5.29）式代入（5.22）式，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mu_\alpha}{dt}&=2\mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta-2\mu_\alpha\pi V_r\\ \frac{d\mu_\delta}{dt}&=-\mu_\alpha^2\sin\delta\cos\delta-2\mu_\delta\pi V_r\end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

若μ_α用时秒/年为单位，μ_δ用角秒/年为单位，π用角秒为单位，V_r用公里/秒为单位，则上式改写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mu_\alpha}{dt}&=2\mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta\sin1''-0.422\mu_\alpha\pi V_r\sin1''\\ \frac{d\mu_\delta}{dt}&=-225\mu_\alpha^2\sin\delta\cos\delta\sin1''-0.422\mu_\delta\pi V_r\sin1''\end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

上式右端第二项称为缩减项，它们是由恒星距离的变化引起。

因此，由（5.19）、（5.20）和（5.30）式可得恒星位置和自行随位置历元 t 的变化为

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha_0+\mu_{\alpha0}\tau+(\mu_{\alpha0}\mu_{\delta0}\tan\delta_0-\mu_{\alpha0}\pi_0V_{r0})\tau^2\\ \delta&=\delta_0+\mu_{\delta0}\tau-(\tfrac{1}{2}\mu_{\alpha0}^2\sin\delta_0\cos\delta_0+\mu_{\delta0}\pi_0V_{r0})\tau^2\end{aligned}\right\} \tag{5.32}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_\alpha&=\mu_{\alpha0}+(2\mu_{\alpha0}\mu_{\delta0}\tan\delta_0-2\mu_{\alpha0}\pi_0V_{r0})\tau\\ \mu_\delta&=\mu_{\delta0}-(\mu_{\alpha0}^2\sin\delta_0\cos\delta_0+2\mu_{\delta0}\pi_0V_{r0})\tau\end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

其中$\tau=t-t_0$。

使用矢量方法可以给出恒星在天球上运动引起的位置和自行变化的严格公式。

恒星的空间赤道位置矢量由（1.48）式给出，即

$$\vec{r}=r\vec{S}(\alpha,\ \delta) \tag{5.34}$$

微分上式，则有

$$\dot{\vec{r}}=V_r\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}+r\mu_\alpha\begin{pmatrix}-\cos\delta\sin\alpha\\ \cos\delta\cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}+r\mu_\delta\begin{pmatrix}-\sin\delta\cos\alpha\\ -\sin\delta\sin\alpha\\ \cos\delta\end{pmatrix} \tag{5.35}$$

其中 $V_r=\dot{r}$ 为视向速度。

由于假定恒星在空间的运动速度为常数，因此有

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\dot{\vec{r}}(t_0)\tau \tag{5.36}$$

$$\dot{\vec{r}}(t)=\dot{\vec{r}}(t_0) \tag{5.37}$$

其中$\tau=t-t_0$。（5.36）和（5.37）式可写成

$$r\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}=r_0\begin{pmatrix}\cos\delta_0\cos\alpha_0\\ \cos\delta_0\sin\alpha_0\\ \sin\delta_0\end{pmatrix}+V_{r0}\tau\begin{pmatrix}\cos\delta_0\cos\alpha_0\\ \cos\delta_0\sin\alpha_0\\ \sin\delta_0\end{pmatrix}$$

$$+r_0\mu_{\alpha 0}\tau\begin{pmatrix}-\cos\delta_0\sin\alpha_0\\ \cos\delta_0\cos\alpha_0\\ 0\end{pmatrix}+r_0\mu_{\delta 0}\tau\begin{pmatrix}-\sin\delta_0\cos\alpha_0\\ -\sin\delta_0\sin\alpha_0\\ \sin\delta_0\end{pmatrix}\qquad(5.38)$$

$$V_r\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}+r\mu_\alpha\begin{pmatrix}-\cos\delta\sin\alpha\\ \cos\delta\cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}+r\mu_\delta\begin{pmatrix}-\sin\delta\cos\alpha\\ -\sin\delta\sin\alpha\\ \cos\delta\end{pmatrix}=V_{r0}\begin{pmatrix}\cos\delta_0\cos\alpha_0\\ \cos\delta_0\sin\alpha_0\\ \sin\delta_0\end{pmatrix}$$

$$+r_0\mu_{\alpha 0}\begin{pmatrix}-\cos\delta_0\sin\alpha_0\\ \cos\delta_0\cos\alpha_0\\ 0\end{pmatrix}+r_0\mu_{\delta 0}\begin{pmatrix}-\sin\delta_0\cos\alpha_0\\ -\sin\delta_0\sin\alpha_0\\ \cos\delta_0\end{pmatrix}\qquad(5.39)$$

利用（5.38）和（5.39）式，可以建立下列关系式

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha(\alpha_0,\delta_0,r_0,\mu_{\alpha0},\mu_{\delta0},V_{r0},\tau)\\ \delta&=\delta(\alpha_0,\delta_0,r_0,\mu_{\alpha0},\mu_{\delta0},V_{r0},\tau)\\ r&=r(\alpha_0,\delta_0,r_0,\mu_{\alpha0},\mu_{\delta0},V_{r0},\tau)\\ \mu_\alpha&=\mu_\alpha(\alpha_0,\delta_0,r_0,\mu_{\alpha0},\mu_{\delta0},V_{r0},\tau)\\ \mu_\delta&=\mu_\delta(\alpha_0,\delta_0,r_0,\mu_{\alpha0},\mu_{\delta0},V_{r0},\tau)\\ V_r&=V_r(\alpha_0,\delta_0,r_0,\mu_{\alpha0},\mu_{\delta0},V_{r0},\tau)\end{aligned}\right\}\qquad(5.40)$$

这样，在假定恒星相对于太阳的速度为匀速的基础上，只要知道某一位置历元恒星的位置、距离、自行和视向速度等量，就可以计算出任一位置历元时相应的量。可以推导出（5.40）式函数关系的严格公式

$$\left.\begin{aligned}\tan(\alpha-\alpha_0)&=\frac{\mu_{\alpha0}\tau}{1+(\pi_0V_{r0}-\mu_{\delta0}\tan\delta_0)\tau}\\ \tan\frac{1}{2}(\delta-\delta_0)&=\frac{\mu_{\delta0}\tau+(1-\frac{r}{r_0}+\pi_0V_{r0}\tau)\tan\delta_0}{\frac{r}{r_0}+\{[1+(\pi_0V_{r0}-\mu_{\delta0}\tan\delta_0)\tau]^2+\mu_{\alpha0}^2\tau^2\}^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\right\}\qquad(5.41)$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_\alpha&=\frac{\mu_{\alpha0}}{[1+(\pi_0V_{r0}-\mu_{\delta0}\tan\delta_0)\tau]^2+\mu_{\alpha0}^2\tau^2}\\ \mu_\delta&=\frac{\mu_{\delta0}(1+\pi_0V_{r0}\tau)-(\mu_{\alpha0}^2\cos^2\delta_0+\mu_{\delta0}^2)\tan\delta_0\tau}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\{[1+(\pi_0V_{r0}-\mu_{\delta0}\tan\delta_0)\tau]^2+\mu_{\alpha0}^2\tau^2\}^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\right\}\qquad(5.42)$$

其中

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2=\left(\frac{\pi_0}{\pi}\right)^2=1+2\pi_0V_{r0}\tau+[(\pi_0V_{r0})^2+(\mu_{\alpha0}^2\cos^2\delta_0+\mu_{\delta0}^2)]\tau^2\qquad(5.43)$$

若把（5.41）和（5.42）式展开到τ的二阶项，这正是（5.32）和（5.33）式。

上面所述的恒星位置的变换和自行的变换不仅需要知道位置历元t_0时的恒星位置和自行，而且还要知道t_0时恒星的距离和视向速度。目前只有少数恒星的视向速度是知道的，距离测

定的相对精度也较低。当距离或视向速度未知时，通常假定它们等

对于参考系的变化也可用旋转矩阵表示，有

$$\vec{S}(\alpha,\delta)=M\vec{S}(\alpha_0,\delta_0)$$

其中

$$M=R_z(-\alpha_0)R_Y(\delta_0-90^\circ)R_z(\varphi_0)R_Y(\mu_0\tau)R_z(-\varphi_0)R_Y(90^\circ-$$

μ_0和φ_0为在位置历元t_0时恒星的总自行和方向位置角。（5.44）式也

$$\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\delta_0\cos\alpha_0&-\sin\alpha_0&\cos\delta_0\cos\alpha_0\\ \sin\delta_0\sin\alpha_0&\cos\alpha_0&\cos\delta_0\sin\alpha_0\\ -\cos\alpha_0&0&\sin\delta_0\end{pmatrix}\Bigg(\begin{matrix}-c\\ si\end{matrix}$$

讨论恒星位置和自行随位置历元t的变化时，参考系被认为是固定

由于岁差，平赤道坐标系变动，这使自行在赤经圈和赤纬圈上的分量

新分配。

恒星位置随定向历元的变化已在第四章第四节里讨论。下面我们

化对赤经自行和赤纬自行影响的表达式。利用（5.21）式，但这里是

$$\frac{d\mu_\alpha}{dT}=\sin\varphi\sin\delta\frac{d\mu}{dT}+\mu\cos\varphi\sec\delta\frac{d\varphi}{dT}+\mu\sin\varphi\sec\delta\tan\delta\frac{d\delta}{dT}$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dT}=\cos\varphi\frac{d\mu}{dT}-\mu\sin\varphi\frac{d\varphi}{dT}$$

岁差不影响恒星的总自行μ的大小，仅影响它的方向，故

$$\frac{d\mu}{dT}=0$$

岁差引起恒星赤纬的变化，根据（4.25）式第二式，有

$$\frac{d\delta}{dT}=n\cos\alpha$$

在图5.3中，设定向历元T时平极为P，经过很短时间间隔dT后的平极为P'，σ为某颗恒星，它的自行方向沿大圆σV。显然在时间间隔dT内，自行的方向位置角的增量为$d\varphi=\angle P'\sigma P$。这里仅仅需要考虑日月岁差，因为行星岁差既不影响恒星的赤纬也不影响自行的方向位置角。

由于日月岁差，平极绕着黄极K描绘出一小圆，其运动方向总是指向该瞬间的平春分点。运动的线速度为n，因此有

图5.3 定向历元对

$$\left.\begin{aligned}PP'&=ndT\\ \angle P'P\sigma&=\alpha\end{aligned}\right\}$$

严格说PP'为小圆弧，但在考虑很短时间间隔dT内，可以把它处理为大

为是球面三角形，利用正弦公式，有

$$\sin d\varphi\cos\delta'=\sin(ndT)\sin\alpha$$

定的相对精度也较低。当距离或视向速度未知时，通常假定它们等于零。这时，恒星位置相对于参考系的变化也可用旋转矩阵表示，有

$$\vec{S}(\alpha,\ \delta)=M\vec{S}(\alpha_0,\ \delta_0) \tag{5.44}$$

其中

$$M=R_Z(-\alpha_0)R_Y(\delta_0-90^\circ)R_Z(\varphi_0)R_Y(\mu_0\tau)R_Z(-\varphi_0)R_Y(90^\circ-\delta_0)R_Z(\alpha_0) \tag{5.45}$$

μ_0和φ_0为在位置历元t_0时恒星的总自行和方向位置角。（5.44）式也可写成

$$\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\delta_0\cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 & \cos\delta_0\cos\alpha_0\\ \sin\delta_0\sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 & \cos\delta_0\sin\alpha_0\\ -\cos\alpha_0 & 0 & \sin\delta_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\cos\varphi_0\sin\mu_0\tau\\ \sin\varphi_0\sin\mu_0\tau\\ \cos\mu_0\tau\end{pmatrix} \tag{5.46}$$

讨论恒星位置和自行随位置历元t的变化时，参考系被认为是固定不动，它定向于历元T。由于岁差，平赤道坐标系变动，这使自行在赤经圈和赤纬圈上的分量在方向和大小上不断重新分配。

恒星位置随定向历元的变化已在第四章第四节里讨论。下面我们来推算因定向历元的变化对赤经自行和赤纬自行影响的表达式。利用（5.21）式，但这里是对定向历元T求导，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mu_\alpha}{dT}&=\sin\varphi\sin\delta\frac{d\mu}{dT}+\mu\cos\varphi\sec\delta\frac{d\varphi}{dT}+\mu\sin\varphi\sec\delta\tan\delta\frac{d\delta}{dT}\\ \frac{d\mu_\delta}{dT}&=\cos\varphi\frac{d\mu}{dT}-\mu\sin\varphi\frac{d\varphi}{dT}\end{aligned}\right\} \tag{5.47}$$

岁差不影响恒星的总自行μ的大小，仅影响它的方向，故

$$\frac{d\mu}{dT}=0 \tag{5.48}$$

岁差引起恒星赤纬的变化，根据（4.25）式第二式，有

$$\frac{d\delta}{dT}=n\cos\alpha \tag{5.49}$$

在图5.3中，设定向历元T时平极为P，经过很短时间间隔dT后的平极为P'，σ为某颗恒星，它的自行方向沿大圆σV。显然在时间间隔dT内，自行的方向位置角的增量为$d\varphi=\angle P'\sigma P$。这里仅仅需要考虑日月岁差，因为行星岁差既不影响恒星的赤纬也不影响自行的方向位置角。

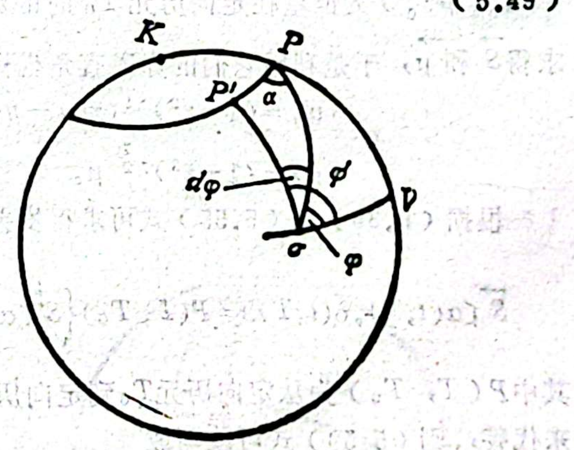


图5.3 定向历元对自行的影响

由于日月岁差，平极绕着黄极K描绘出一小圆，其运动方向总是指向该瞬间的平春分点，运动的线速度为n，因此有

$$\left.\begin{aligned}PP'&=ndT\\ \angle P'P\sigma&=\alpha\end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

严格说PP'为小圆弧，但在考虑很短时间间隔dT内，可以把它处理为大圆弧，故$PP'\sigma$可认为是球面三角形，利用正弦公式，有

$$\sin d\varphi\cos\delta'=\sin(ndT)\sin\alpha \tag{5.51}$$

当dT趋向于零时，上式成为

$$\frac{d\varphi}{dT}=n\sin\alpha\sec\delta \tag{5.52}$$

将（5.48）、（5.49）和（5.52）式代入（5.47）式，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mu_\alpha}{dT}&=n(\mu_\alpha\cos\alpha\tan\delta+\mu_\delta\sin\alpha\sec^2\delta)\\ \frac{d\mu_\delta}{dT}&=-n\mu_\alpha\sin\alpha\end{aligned}\right\} \tag{5.53}$$

上式称为自行的岁差变化。因此，恒星自行随定向历元T的变化为

$$\left.\begin{aligned}\mu_\alpha&=\mu_{\alpha_0}+n(\mu_{\alpha_0}\cos\alpha_0\tan\delta_0+\mu_{\delta_0}\sin\alpha_0\sec^2\delta_0)\Delta T\\ \mu_\delta&=\mu_{\delta_0}-n\mu_{\alpha_0}\sin\alpha_0\Delta T\end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

其中$\Delta T=T-T_0$。由于自行很小，所以上式一阶表达式已足够满足需要。

岁差对自行影响的严格处理可使用岁差矩阵。岁差不影响恒星的距离和视向速度。岁差对恒星位置的影响由（4.75）式给出，即

$$\vec{S}(\alpha,\ \delta)=P\vec{S}(\alpha_0,\ \delta_0) \tag{5.55}$$

其中$(\alpha_0,\ \delta_0)$为恒星在定向历元T_0时赤道坐标，$(\alpha,\ \delta)$为恒星在定向历元T时赤道坐标，P为岁差矩阵。岁差对自行的影响类似（5.55）式，有

$$\vec{\mu}=P\vec{\mu}_0 \tag{5.56}$$

其中

$$\vec{\mu}_0=\begin{pmatrix}\mu_{x_0}\\ \mu_{y_0}\\ \mu_{z_0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\alpha_0\cos\delta_0\mu_{\alpha_0}-\cos\alpha_0\sin\delta_0\mu_{\delta_0}\\ \cos\alpha_0\cos\delta_0\mu_{\alpha_0}-\sin\alpha_0\sin\delta_0\mu_{\delta_0}\\ \cos\delta_0\mu_{\delta_0}\end{pmatrix} \tag{5.57}$$

$(\mu_{\alpha_0},\ \mu_{\delta_0})$为恒星在定向历元$T_0$时的赤经自行和赤纬自行。由（5.55）和（5.56）式可求得$\vec{S}$和$\vec{\mu}$，于是利用它们的赤道直角坐标分量x、y、z、μ_x、μ_y、μ_z，得

$$\left.\begin{aligned}\mu_\alpha&=(1-z^2)^{-1}(x\mu_y-y\mu_x)\\ \mu_\delta&=(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\mu_z\end{aligned}\right\} \tag{5.58}$$

根据（5.36）和（5.55）式可求得岁差和自行对恒星位置的综合影响的公式

$$\vec{S}[\alpha(t,T),\delta(t,T)]=P(T,T_0)\left\{\vec{S}[\alpha(t_0,T_0),\delta(t_0,T_0)]+\frac{\dot{\vec{r}}(t_0,T_0)}{r_0}(t-t_0)\right\} \tag{5.59}$$

其中$P(T,\ T_0)$为从定向历元T_0到定向历元T的岁差矩阵。如果（5.36）式用（5.44）式来代替，则（5.59）式可改写成

$$\vec{S}[\alpha(t,T),\delta(t,T)]=P(T,T_0)M(t,t_0)\vec{S}[\alpha(t_0,T_0),\delta(t_0,T_0)] \tag{5.60}$$

其中$M(t,\ t_0)$为从位置历元t_0到位置历元t的自行矩阵。

这里为了区分岁差和自行的概念，我们给出了不同的定向历元和位置历元，事实上在大多数具体的工作中，位置历元和定向历元取为相同，即$t_0=T_0$，$t=T$。

第三节　恒星的视向速度

如在第一节里所描述，恒星相对于太阳的运动速度在视线方向的分量称为视向

$$V_r=\frac{dr}{dt}$$

其中r为恒星离太阳的距离。显然，当恒星远离太阳时，r增加，$V_r>0$，接近太小，$V_r<0$。

视向速度和观测点有关。恒星相对于站心、地心、日心而言的视向速度，我站心视向速度V_r''，地心视向速度V_r'和日心视向速度V_r。

站心的视向速度V_r''可由恒星光谱线的多普勒频移或红移Z的测量而推算得到。谱线的本征频率，ν为相应的观测频率，则红移Z由下式给出

$$1+Z=\frac{\nu_0}{\nu}$$

观测的红移Z同站心视向速度V_r''可由经典的多普勒公式相联系，即

$$Z=\frac{V_r''}{c}$$

上式通常仅用于恒星光谱测量的归算中。当对某些遥远的河外源存在大的红移时，相对论效应的影响。在相对论框架中的多普勒频移将在第八章第一节里讨论。

为了求出恒星相对日心的视向速度，需要对站心视向速度作地球运动的改正。向的单位矢量为$\vec{S}$，则地心视向速度V_r'和日心视向速度V_r可分别写为

$$V_r'=V_r''+\vec{v}'\cdot\vec{S}$$

$$V_r=V_r'+\vec{v}\cdot\vec{S}$$

其中$\vec{v}'$为观测者相对地心的速度，$\vec{v}$为地心相对日心的速度。

$\vec{v}'$同周日光行差相联系，如在第二章第五节里所述，它的运动方向总是指向大小由（2.94）式给出。到足够精度，v'可表示成

$$\vec{v}'=v_0\cos\varphi'$$

其中$v_0=0.465$公里/秒为赤道上的一点的周日运动线速度，φ'为观测者的地心纬度。

在图5.4中，设P为北天极，E为东点，恒星σ的赤纬为δ，时角为t。在球面三角形$P\sigma E$中利用余弦公式，有

$$\cos\sigma E=-\cos\delta\sin t \tag{5.67}$$

因此由地球自转引起的视向速度为

$$\vec{v}'\cdot\vec{S}=\vec{v}'\cos\sigma E=-\vec{v}'\cos\delta\sin t \tag{5.68}$$

于是（5.64）式可写为

$$V_r'=V_r''-0.465\cos\varphi'\cos\delta\sin t \tag{5.69}$$

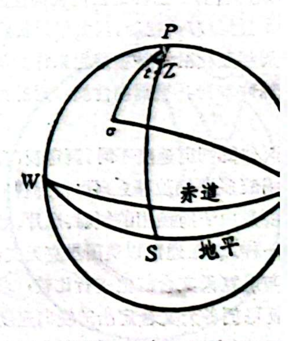


图5.4　球面三角形PσE

第三节　恒星的视向速度

如在第一节里所描述，恒星相对于太阳的运动速度在视线方向的分量称为视向速度V_r，即

$$V_r = \frac{dr}{dt} \qquad (5.61)$$

其中r为恒星离太阳的距离。显然，当恒星远离太阳时，r增加，$V_r>0$，接近太阳时，r减小，$V_r<0$。

视向速度和观测点有关。恒星相对于站心、地心、日心而言的视向速度，我们分别称为站心视向速度V_r''，地心视向速度V_r'和日心视向速度V_r。

站心的视向速度V_r''可由恒星光谱线的多普勒频移或红移Z的测量而推算得到。假设ν_0是谱线的本征频率，ν为相应的观测频率，则红移Z由下式给出

$$1+Z = \frac{\nu_0}{\nu} \qquad (5.62)$$

观测的红移Z同站心视向速度V_r''可由经典的多普勒公式相联系，即

$$Z = \frac{V_r''}{c} \qquad (5.63)$$

上式通常仅用于恒星光谱测量的归算中。当对某些遥远的河外源存在大的红移时，则需考虑相对论效应的影响。在相对论框架中的多普勒频移将在第八章第一节里讨论。

为了求出恒星相对日心的视向速度，需要对站心视向速度作地球运动的改正。设恒星方向的单位矢量为$\vec{S}$，则地心视向速度V_r'和日心视向速度V_r可分别写为

$$V_r' = V_r'' + \vec{v}' \cdot \vec{S} \qquad (5.64)$$

$$V_r = V_r' + \vec{v} \cdot \vec{S} \qquad (5.65)$$

其中$\vec{v}'$为观测者相对地心的速度，$\vec{v}$为地心相对日心的速度。

$\vec{v}'$同周日光行差相联系，如在第二章第五节里所述，它的运动方向总是指向东点，它的大小由（2.94）式给出。到足够精度，v'可表示成

$$\vec{v}' = v_0 \cos\varphi' \qquad (5.66)$$

其中$v_0 = 0.465$公里/秒为赤道上的一点的周日运动线速度，φ'为观测者的地心纬度。

在图5.4中，设P为北天极，E为东点，恒星σ的赤纬为δ，时角为t。在球面三角形$P\sigma E$中利用余弦公式，有

$$\cos\sigma E = -\cos\delta\sin t \qquad (5.67)$$

因此由地球自转引起的视向速度为

$$\vec{v}' \cdot \vec{S} = v' \cos\sigma E = -v' \cos\delta\sin t \qquad (5.68)$$

于是（5.64）式可写为

$$V_r' = V_r'' - 0.465\cos\varphi'\cos\delta\sin t \qquad (5.69)$$

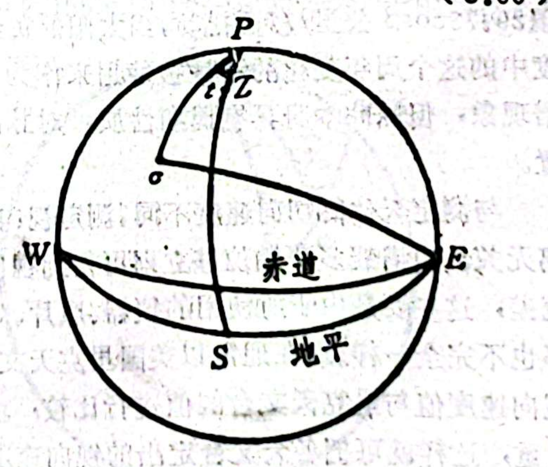


图5.4　球面三角形$P\sigma E$

式中 V'_r，V''_r用公里/秒为单位。

地心相对日心的速度$\vec{v}$同周年光行差相联系，它可分解为两个速度：一是切向速度$\vec{v}_1$，另一是平行于地球轨道短轴的速度$\vec{v}_2$。在黄道直角坐标系中这两个速度的表达式由（3.21）和（3.22）式给出，即

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_1 &= v_0\begin{pmatrix}\sin\lambda_\odot \\ -\cos\lambda_\odot \\ 0\end{pmatrix} \\ \vec{v}_2 &= e v_0\begin{pmatrix}-\sin\pi \\ \cos\pi \\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{5.70}$$

其中$v_0=Kc$，K为光行差常数，c为光速，$\lambda_\odot$为太阳的黄经，e为轨道的偏心率，π为近日点黄经。恒星方向在黄道直角坐标系的单位矢量为$\vec{S}(\lambda,\beta)$。因此由地球绕太阳公转引起的视向速度为

$$\vec{v}\cdot\vec{S}=Kc[\cos\beta\sin(\lambda_\odot-\lambda)+e\cos\beta\sin(\lambda-\pi)] \tag{5.71}$$

将光行差常数K（用弧度表示），光速c（用公里/秒表示）和轨道的偏心率e代入上式。于是（5.65）式可写为

$$V_r=V'_r+29.79\cos\beta\sin(\lambda_\odot-\lambda)+0.50\cos\beta\sin(\lambda-\pi) \tag{5.72}$$

式中V_r，V'_r用公里/秒为单位。

如果从天文历表中直接查取地球相对太阳系质心的速度$\vec{v}$的赤道直角坐标（$\dot{x}_c$，$\dot{y}_c$，$\dot{z}_c$），则（5.72）式可改写成

$$V_r=V'_r+1731.5(\dot{x}_c\cos\alpha\cos\delta+\dot{y}_c\sin\alpha\cos\delta+\dot{z}_c\sin\delta) \tag{5.73}$$

其中1731.5为（$\dot{x}_c$，$\dot{y}_c$，$\dot{z}_c$）的单位从天文单位/天转换为公里/秒的因子。

（5.72）式右端的最后一项为小项，类似于周年光行差的E项，它基本上是常数，不存在周年变化。当研究分光双星子星的轨道运动时，人们感兴趣的是恒星视向速度的变化，通常该项被忽略。由右端的第二项看出，每颗恒星的视向速度存在周年变化，变化的振幅和位相依赖于恒星的位置。所测的恒星视向速度在改正了小的周日变化后，将绕着其振幅的平均值$29.79\cos\beta$公里/秒而摆动，当太阳的黄经$\lambda_\odot$等于$\lambda+90°$时，视向速度达到最大值。视向速度中的这个周年变化的特性被使用来作为测定射电脉冲星位置的手段。射电脉冲星不存在光谱现象，但脉冲本身具有周期性质，对脉冲变化的观测频率进行分析可用来确定脉冲星的位置。

与测定天体的切向速度不同，测定视向速度不需要知道恒星视差，测定的精度与天体的距离无关。由谱线多普勒位移立即可得到视向速度。各天文台所测定的视向速度存在一定的系统差，这主要是由于所使用的仪器、底片、处理观测资料的方法不同，所采用的谱线的本征频率也不完全一样。现在通常以美国里克天文台的系统为标准，各天文台测定出几十个标准星的视向速度值与里克天文台的值进行比较，求出相对里克天文台的系统改正和各天文台系统的权重，这样就可把各天文台定出的视向速度值归算到里克系统。

当恒星相对太阳运动时，恒星与太阳之间的距离和方向都在不断改变着，因此即使恒星

的空间速度不变，恒星的视向速度仍随时间变化。微分（5.3）式第一式，得

$$\frac{dV_r}{dt}=V\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=V_T\frac{d\theta}{dt} \tag{5.74}$$

将（5.4）和（5.6）式代入上式，得

$$\frac{dV_r}{dt}=0.00230\frac{\mu^2}{\pi} \tag{5.75}$$

其中$\frac{dV_r}{dt}$的单位是公里/(百年·秒)，μ与π的单位分别是角秒/年和角秒。由(5.75)式可见，$\frac{dV_r}{dt}$总大于零，这表示视向速度在不断增加，但视向速度的这种长期变化在数值上是很小的，一般可以忽略不计。

1932年里克天文台发表的“视向速度表”列出了约7000个包括恒星、星团、星云的视向速度。1953年威尔逊山天文台出版的“恒星视向速度总表”是一本被广泛使用的视向速度表，它列出了15106个恒星的视向速度。目前最完整的视向速度表是1972年由基特峰国家天文台出版的包含25000个以上恒星的“恒星视向速度表”。

第四节　自行和视向速度中的系统影响

由自行和视向速度给出的空间速度是恒星相对太阳而言的运动，太阳本身也在运动，太阳的运动一定会在恒星相对太阳的运动中反映出来。因此恒星相对太阳的运动至少由两部分组成：一部分是恒星本身固有的运动，称为本动；另一部分是由于太阳的运动而引起的，称为视差动。

建立银心坐标系作为基本参考系。取太阳附近空间范围一群恒星，它们的形心速度相对于基本参考系运动的坐标系称为本地静止标准，简称LSR。所谓形心是指这群恒星的几何中心，也就是把所有恒星的质量当作一样而得出的这群恒星的惯量中心。

恒星和太阳都相对LSR有它们自己的运动。恒星相对LSR的运动速度称为恒星的本动速度，太阳相对LSR的运动速度称为太阳的本动速度。假设太阳的本动速度为$V_\odot$，用公里/秒为单位，则它在一年期间位移了$nV_\odot$公里，其中$n=3.156\times10^7$为一年的秒数，太阳的这个位移将会在每颗恒星的自行中反映出来。类似于（3.34）式，可定义以角秒为单位的长期视差h，有

$$h=\frac{nV_\odot}{r}=\frac{V_\odot}{4.74}\pi \tag{5.76}$$

长期视差给出了因太阳运动引起的恒星的周年位移，太阳运动的方向和恒星的方向垂直。

设太阳相对LSR的运动在自行中的反映即视差动用μ_S表示，它在赤经和赤纬方向的分量分别为$\mu_{S\alpha}$和$\mu_{S\delta}$。在图5.5中，设S为太阳运

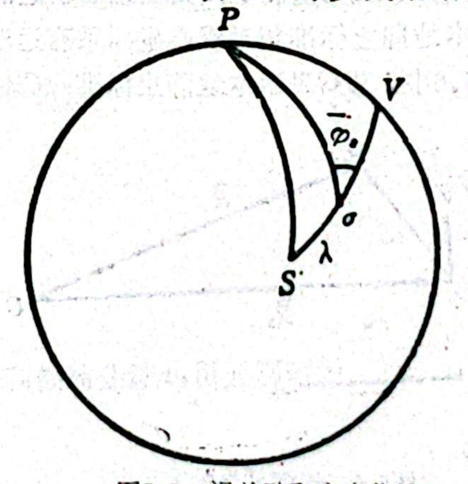


图5.5　视差动和方向位置角

动所指向天球上的一点（称为太阳向点），σ为恒星，S的赤道坐标为（A，D），σ的赤道坐标为（α，δ），$S\sigma=\lambda$为太阳运动的方向和恒星方向之间的角度。显然，恒星的视差动应该沿着大圆SV。令$\angle P\sigma V=\varphi_s$，则$\varphi_s$称为视差动的方向位置角。类似（5.10）式，有

$$\left.\begin{aligned}\mu_{s\alpha}&=\mu_s\sin\varphi_s\sec\delta\\ \mu_{s\delta}&=\mu_s\cos\varphi_s\end{aligned}\right\}\qquad(5.77)$$

设太阳的本动速度在恒星相对太阳的切向速度中的反映用V_T'表示，则有

$$V_T'=V_\odot\cos(\lambda-90^\circ)=V_\odot\sin\lambda\qquad(5.78)$$

根据（5.6）式，视差动μ_s为

$$\mu_s=\frac{V_\odot\pi\sin\lambda}{4.74}=h\sin\lambda\qquad(5.79)$$

将上式代入（5.77）式，得

$$\left.\begin{aligned}\mu_{s\alpha}&=h\sin\lambda\sin\varphi_s\sec\delta\\ \mu_{s\delta}&=h\sin\lambda\cos\varphi_s\end{aligned}\right\}\qquad(5.80)$$

在球面三角形$PS\sigma$中，利用正弦公式和五元素公式，有

$$\left.\begin{aligned}\sin\lambda\sin\varphi_s&=\sin(\alpha-A)\cos D\\ \sin\lambda\cos\varphi_s&=-\sin D\cos\delta+\cos D\sin\delta\cos(\alpha-A)\end{aligned}\right\}\qquad(5.81)$$

将上式代入（5.80）式，得

$$\left.\begin{aligned}\mu_{s\alpha}&=h\sin(\alpha-A)\cos D\sec\delta\\ \mu_{s\delta}&=h[\cos D\sin\delta\cos(\alpha-A)-\sin D\cos\delta]\end{aligned}\right\}\qquad(5.82)$$

上式是视差动赤经分量$\mu_{s\alpha}$和赤纬分量$\mu_{s\delta}$的表达式，它们是恒星自行中的系统影响，被包含在每颗恒星的自行中。

在视向速度中也有太阳运动引起的类似的系统影响。设太阳的本动速度在恒星的视向速度中的反映用V_S'表示，则有

$$V_S'=-V_\odot\cos\lambda\qquad(5.83)$$

在图5.5的球面三角形$PS\sigma$中，利用余弦公式，可求得cosλ。于是（5.83）式成为

$$V_S'=-V_\odot[\sin D\sin\delta+\cos D\cos\delta\cos(\alpha-A)]\qquad(5.84)$$

当太阳的本动速度$V_\odot$和太阳向点的赤道坐标(A，D)已知时，利用（5.82）和(5.84）式就能求得自行和视向速度中因太阳运动引起的系统影响。

由于本地静止标准相对银心坐标系有运动，它对恒星的自行和视向速度也会产生系统影响。在图5.6中，设O表示本地静止标准，C表示银心，S表示恒星，它不在图中平面上。O和S相对银心C的位置矢量分别为$\vec{R}_0$和$\vec{R}$，S相对O的位置矢量为$\vec{rS}$。若O和S绕银轴作圆周运动，O在银道面上，S的轨道面平行于银道面，并且恒星的速度仅仅是由于银河系自转引起，则可得到恒星的速度为

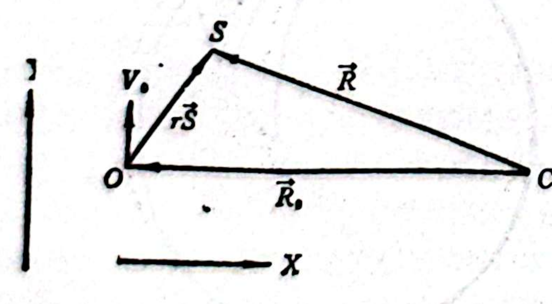


图5.6　银河系自转

$$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{R}\qquad(5.85)$$

其中$\vec{\omega}$为S绕C的角速度矢量。取以O为原点的银道直角坐标系，由于银河系自转方向与银经

增加的方向相反，因此有

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \tag{5.86}$$

类似地可得到O绕C的速度为

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega}_0 \times \vec{R}_0 \tag{5.87}$$

其运动方向垂直于O与C的连线。由图5.6，有

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + r\vec{S} \tag{5.88}$$

利用（5.85），（5.87）和（5.88）式，可以得到恒星相对本地静止标准的速度

$$\vec{v} = \vec{V} - \vec{V}_0 = (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \times \vec{R}_0 + r\vec{\omega} \times \vec{S} \tag{5.89}$$

其中$\vec{S}$为恒星方向在银道坐标系中的单位矢量

$$\vec{S} = \vec{S}(l, b) = \begin{pmatrix} \cos b \cos l \\ \cos b \sin l \\ \sin b \end{pmatrix} \tag{5.90}$$

（5.89）式可改写成

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} r\omega \sin l \cos b \\ R_0(\omega - \omega_0) - r\omega \cos l \cos b \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.91}$$

由（5.90）和（5.91）式可求得因银河系自转引起的视向速度v_r为

$$v_r = \vec{v} \cdot \vec{S} = R_0(\omega - \omega_0)\cos b \sin l \tag{5.92}$$

当$r \ll R_0$时，可以有下列近似表达式

$$\omega - \omega_0 = \left(\frac{d\omega}{dR}\right)_0 (R - R_0) \tag{5.93}$$

根据（5.88）式在允许的精度范围内可得

$$R - R_0 = -r\cos b \cos l \tag{5.94}$$

定义

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}R_0\left(\frac{d\omega}{dR}\right)_0 \\ B &= A - \omega_0 \end{aligned}\right\} \tag{5.95}$$

A和B称为奥尔特常数，用公里/(秒·千秒差距)为单位。

由（5.93）、（5.94）和（5.95）式得

$$R_0(\omega - \omega_0) = 2Ar\cos b \cos l \tag{5.96}$$

将上式代入（5.92）式，得

$$v_r = Ar\cos^2 b \sin 2l \tag{5.97}$$

其中r的单位为千秒差距，v_r的单位为公里/秒。

由银河系自转引起的切向速度的银经分量v_l和银纬分量v_b可分别写为

$$\left.\begin{aligned} v_l &= \vec{v} \cdot \vec{l} \\ v_b &= \vec{v} \cdot \vec{b} \end{aligned}\right\} \tag{5.98}$$

其中$\vec{l}$和$\vec{b}$分别为沿着银经和银纬增加的方向在银道坐标系中的单位矢量。$\vec{l}$沿着银经增加的方向，因此它平行于银道面并且垂直于$\vec{S}$，银河系自转方向与银经增加的方向相反，因此l和$-\vec{\omega}\times\vec{S}$平行。$\vec{b}$沿着银纬增加的方向，它垂直于$\vec{S}$和$\vec{l}$，因此有

$$\left.\begin{aligned}\vec{l}&=-\frac{\vec{\omega}\times\vec{S}}{\omega\cos b}\\ \vec{b}&=\vec{S}\times\vec{l}=-\frac{\vec{S}\times(\vec{\omega}\times\vec{S})}{\omega\cos b}\end{aligned}\right\}\tag{5.99}$$

将（5.86）和（5.90）式代入上式，得

$$\left.\begin{aligned}\vec{l}&=\begin{pmatrix}-\sin l\\ \cos l\\ 0\end{pmatrix}\\ \vec{b}&=\begin{pmatrix}-\cos l\sin b\\ -\sin l\sin b\\ \cos b\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{5.100}$$

将（5.91）和（5.100）式代入（5.98）式，得

$$\left.\begin{aligned}v_l&=R_0(\omega-\omega_0)\cos l-r\omega\cos b\\ v_b&=-R_0(\omega-\omega_0)\sin l\sin b\end{aligned}\right\}\tag{5.101}$$

由（5.95）和（5.96）式，上式可改写成

$$\left.\begin{aligned}v_l&=A\cos 2l\cos b+Br\cos b\\ v_b&=-Ar\sin 2l\sin b\cos b\end{aligned}\right\}\tag{5.102}$$

根据（5.15）式可把v_l和v_b变换为银经自行μ_l和银纬自行μ_b

$$\left.\begin{aligned}\mu_l&=\frac{A}{4.74}\cos 2l+\frac{B}{4.74}\\ \mu_b&=-\frac{A}{4.74}\sin 2l\sin b\cos b\end{aligned}\right\}\tag{5.103}$$

其中自行的单位为毫角秒/年。（5.97）和（5.103）式是因银河系自转引起的恒星相对 LSR 的视向速度、银经自行和银纬自行影响的计算公式。

要计算银河系自转对赤经自行和赤纬自行的影响，可把$\mu_l\cos b$和μ_b按赤经和赤纬增加的方向重新分配，所得的结果为

$$\left.\begin{aligned}\mu_\alpha\cos\delta&=\left(\frac{A}{4.74}\cos 2l\cos b+\frac{B}{4.74}\cos b\right)\cos\psi+\frac{A}{4.74}\sin 2l\sin b\cos b\sin\psi\\ \mu_\delta&=\left(\frac{A}{4.74}\cos 2l\cos b+\frac{B}{4.74}\cos b\right)\sin\psi-\frac{A}{4.74}\sin 2l\sin b\cos b\cos\psi\end{aligned}\right\}\tag{5.104}$$

其中ψ为银道星位角。

第五节　星表自行的统计分析

恒星自行是通过在不同历元观测所得的恒星位置利用岁差常数采用值变换到同一定向历元后进行比较得到的，这种自行称为星表自行。通常认为恒星的星表自行是由下列五部分组成：

（1）由恒星本动引起的自行的主要成分$(\mu_\alpha)_a$和$(\mu_\delta)_a$；

（2）由太阳相对邻近的LSR的运动引起的视差动$(\mu_\alpha)_s$和$(\mu_\delta)_s$；

（3）由银河系自转引起的对自行的影响量$(\mu_\alpha)_r$和$(\mu_\delta)_r$；

（4）由岁差常数误差通过变换后的恒星位置引起的对自行的影响量$(\mu_\alpha)_p$和$(\mu_\delta)_p$；

（5）由星表分点测定误差导致的对自行的影响量$(\mu_\alpha)_e$和$(\mu_\delta)_e$。

于是有

$$\left.\begin{aligned}\mu_\alpha&=(\mu_\alpha)_a+(\mu_\alpha)_s+(\mu_\alpha)_r+(\mu_\alpha)_p+(\mu_\alpha)_e\\ \mu_\delta&=(\mu_\delta)_a+(\mu_\delta)_s+(\mu_\delta)_r+(\mu_\delta)_p+(\mu_\delta)_e\end{aligned}\right\}\tag{5.105}$$

包括恒星视差动在内的恒星自行，即由（1）和（2）组成的部分是恒星相对太阳运动的速度，假设它在日心赤道直角坐标系中的三个速度分量表示为$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$。再建立一个直角坐标系，坐标原点在太阳邻近所考虑恒星星群的形心，三条坐标轴与日心赤道直角坐标系的三条轴平行，它称为形心坐标系（即LSR）。显然太阳在形心坐标系中的运动速度的三个分量X、Y、Z与太阳的本动速度$V_\odot$、太阳向点的赤道坐标（A，D）的关系为

$$\left.\begin{aligned}X&=V_\odot\cos A\cos D\\ Y&=V_\odot\sin A\cos D\\ Z&=V_\odot\sin D\end{aligned}\right\}\tag{5.106}$$

令$\dot{x}_1$，$\dot{y}_1$，$\dot{z}_1$表示恒星在形心坐标系中运动速度（即恒星的本动速度）的三个分量，则有

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\dot{x}_1-X\\ \dot{y}&=\dot{y}_1-Y\\ \dot{z}&=\dot{z}_1-Z\end{aligned}\right\}\tag{5.107}$$

根据（5.35）式可得到恒星相对太阳运动速度的三个分量$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha & -\sin\delta\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha & -\sin\delta\sin\alpha & \cos\alpha\\ \sin\delta & \cos\delta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_r\\ r\mu_\delta\\ r\mu_\alpha\cos\delta\end{pmatrix}\tag{5.108}$$

恒星的本动对每颗恒星各不相同，在方向上是毫无规律的，在进行自行的统计分析中，可以把它看成是随机的，当作偶然误差处理，因此可以用$-X$，$-Y$，$-Z$分别代替（5.108）式左端的$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，于是有

$$\left.\begin{aligned}(\mu_\alpha)_s\cos\delta&=\frac{\pi}{4.74}(X\sin\alpha-Y\cos\alpha)\\ (\mu_\delta)_s&=\frac{\pi}{4.74}(X\cos\alpha\sin\delta+Y\sin\alpha\sin\delta-Z\cos\delta)\end{aligned}\right\}\tag{5.109}$$

银河系自转可认为由两部分组成：刚体自转和克普勒转动。当到银心的距离R很小时，

恒星绕银心旋转的线速度与R成正比，接近于刚体自转；当R很大时，线速度与R的平方根成反比，接近于行星绕太阳运动的克普勒旋转，这种转动也称为银河系的较差自转。银河系自转对恒星自行的影响由（5.104）式给出，即

$$\left.\begin{aligned}(\mu_\alpha)_r\cos\delta&=\frac{A}{4.74}(\cos 2l\cos b\cos\psi+\sin 2l\sin b\cos b\sin\psi)+\frac{B}{4.74}\cos b\cos\psi\\(\mu_\delta)_r&=\frac{A}{4.74}(\cos 2l\cos b\sin\psi-\sin 2l\sin b\cos b\cos\psi)+\frac{B}{4.74}\cos b\sin\psi\end{aligned}\right\}\quad(5.110)$$

其中包含奥尔特常数B因子的项为银河系的刚体自转引起，包含奥尔特常数A因子的项为银河系的克普勒转动引起。

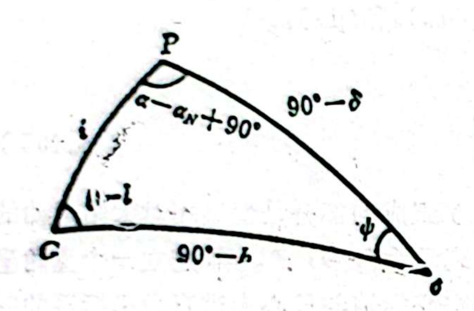


图5.7 球面三角形GPσ

图5. 示以北银极G，北天极P和恒星σ为顶点所组成的球面三角形。利用正弦公式和五元素公式，有

$$\left.\begin{aligned}\cos b\sin\psi&=\sin\alpha_N\sin i\sin\alpha\\&\quad+\cos\alpha_N\sin i\cos\alpha\\\cos b\cos\psi&=-\sin\alpha_N\sin i\cos\alpha\sin\delta\\&\quad+\cos\alpha_N\sin i\sin\alpha\sin\delta+\cos i\cos\delta\end{aligned}\right\}\quad(5.111)$$

其中α_N为银道对赤道升交点的赤经，i为银赤交角。

将（5.111）式代入（5.110）式中包含B的那项，得

$$\left.\begin{aligned}(\mu_\alpha)_r\cos\delta&=\frac{A}{4.74}(\cos 2l\cos b\cos\psi+\sin 2l\sin b\cos b\sin\psi)\\&\quad+\frac{B}{4.74}(-\sin\alpha_N\sin i\cos\alpha\sin\delta+\cos\alpha_N\sin i\sin\alpha\sin\delta+\cos i\cos\delta)\\(\mu_\delta)_r&=\frac{A}{4.74}(\cos 2l\cos b\sin\psi-\sin 2l\sin b\cos b\cos\psi)\\&\quad+\frac{B}{4.74}(\sin\alpha_N\sin i\sin\alpha+\cos\alpha_N\sin i\cos\alpha)\end{aligned}\right\}\quad(5.112)$$

岁差常数是指在基本历元时的黄经总岁差速率p_1，岁差常数误差Δp_1包括黄经日月岁差速率误差$\Delta\psi_1$和赤经行星岁差速率误差$\Delta\chi_1$两部分。

由（4.25）式可得由岁差误差引起的恒星位置的变化

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}&=\Delta m_1+\Delta n_1\sin\alpha\tan\delta\\\frac{d\delta}{dt}&=\Delta n_1\cos\alpha\end{aligned}\right\}\quad(5.113)$$

其中Δm_1和Δn_1分别为赤经岁差速率误差和赤纬岁差速率误差

$$\left.\begin{aligned}\Delta m_1&=\Delta\psi_1\cos\varepsilon-\Delta\chi_1\\\Delta n_1&=\Delta\psi_1\sin\varepsilon\end{aligned}\right\}\quad(5.114)$$

星表分点测定误差Δe对所有恒星的赤经产生相同的影响，它可以与赤经行星岁差速率的误差$\Delta\chi_1$一起考虑。为此令

$$\Delta k=\Delta m_1-\Delta e=\Delta\psi_1\cos\varepsilon-(\Delta e+\Delta\chi_1) \tag{5.115}$$

由（5.113）、（5.114）和（5.115）式可得到由岁差常数误差和星表分点测定误差产生的恒星自行成份

$$\left.\begin{aligned}&[(\mu_a)_p+(\mu_a)_c]\cos\delta=\Delta k\cos\delta+\Delta n_1\sin\alpha\sin\delta\\&(\mu_\delta)_p+(\mu_\delta)_c=\Delta n_1\cos\alpha\end{aligned}\right\} \tag{5.116}$$

将（5.109）、（5.112）和（5.116）式代入（5.105）式，并把$(\mu_a)_a$和$(\mu_\delta)_a$看成是随机量，得

$$\left.\begin{aligned}\mu_a\cos\delta=&\frac{\pi}{4.74}(X\sin\alpha-Y\cos\alpha)+\frac{A}{4.74}(\cos2l\cos b\cos\psi+\sin2l\sin b\cos b\sin\psi)\\&-(\frac{B}{4.74}\sin\alpha_N\sin i)\cos\alpha\sin\delta+(\frac{B}{4.74}\cos\alpha_N\sin i+\Delta n_1)\sin\alpha\sin\delta\\&+(\frac{B}{4.74}\cos i+\Delta k)\cos\delta\\\mu_\delta=&\frac{\pi}{4.74}(X\cos\alpha\sin\delta+Y\sin\alpha\sin\delta-Z\cos\delta)+\frac{A}{4.74}(\cos2l\cos b\sin\psi\\&-\sin2l\sin b\cos b\cos\psi)+(\frac{B}{4.74}\sin\alpha_N\sin i)\sin\alpha\\&+(\frac{B}{4.74}\cos\alpha_N\sin i+\Delta n_1)\cos\alpha\end{aligned}\right\} \tag{5.117}$$

令

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\frac{B}{4.74}\sin\alpha_N\sin i\\\omega_2&=-\frac{B}{4.74}\cos\alpha_N\sin i-\Delta n_1\\\omega_3&=\frac{B}{4.74}\cos i+\Delta k\end{aligned}\right\} \tag{5.118}$$

于是（5.117）式写成

$$\left.\begin{aligned}\mu_a\cos\delta=&\frac{\pi}{4.74}(X\sin\alpha-Y\cos\alpha)+\frac{A}{4.74}(\cos2l\cos b\cos\psi+\sin2l\sin b\cos b\sin\psi)\\&-\omega_1\cos\alpha\sin\delta-\omega_2\sin\alpha\sin\delta+\omega_3\cos\delta\\\mu_\delta=&\frac{\pi}{4.74}(X\cos\alpha\sin\delta+Y\sin\alpha\sin\delta-Z\cos\delta)+\frac{A}{4.74}(\cos2l\cos b\sin\psi\\&-\sin2l\sin l\cos b\cos\psi)+\omega_1\sin\alpha-\omega_2\cos\alpha\end{aligned}\right\} \tag{5.119}$$

上式就是利用恒星自行的统计分析同时求解太阳空间运动速度分量，银河系自转奥尔特常数，岁差常数误差和星表分点测定误差的基本方程。通过大量恒星的自行，可以用最小二乘法求得X、Y、Z、A、B、Δn_1和Δk共七个未知数。利用所得的Δn_1和Δk可计算$\Delta\psi_1$和（$\Delta e+\Delta\chi_1$），显然$\Delta\chi_1$和Δe不能被分离开，只有通过其它途径得到$\Delta\chi_1$后再计算出Δe。

弗里克利用这个方法求得了对纽康岁差常数改正值为

$$\left.\begin{aligned}\Delta\psi_1&=+1''.10\pm0''.15\text{（每世纪）}\\\Delta e+\Delta\chi_1&=+1''.20\pm0''.16\text{（每世纪）}\end{aligned}\right\} \tag{5.120}$$

求得的奥尔特常数为

$$\left.\begin{aligned}A&=+15.6\pm2.8\text{公里/(秒·千秒差距)}\\B&=-10.9\pm2.8\text{公里/(秒·千秒差距)}\end{aligned}\right\}\tag{5.121}$$

所得的$\Delta\psi_1$值直接被IAU1976天文常数系统采用，对于$\Delta e+\Delta\chi_1$，利用新的行星质量值得到$\Delta\chi_1=-0''.029$/世纪后，计算得$\Delta e=+1''.23$，在编制FK5时被用作修正 FK4 赤经自行的基本数据之一，并与其它途径所得的Δe值很一致。所求得的奥尔特常数A和 B 与现在的通用值非常接近。

在利用恒星自行资料时，还可以同时利用恒星的视向速度值，它的基本方程为

$$V_r=-X\cos\alpha\cos\delta-Y\sin\alpha\cos\delta-Z\cos\delta+Ar\sin2l\cos^2b\tag{5.122}$$

将上式与（5.119）式联合求解，能使 X、Y、Z、A 的结果得到改善，进而也使另外三个未知数的结果更完善。

第五章 习 题

1. 恒星在标准历元时的自行方向位置角为φ_0，由于岁差变化，在观测历元时其方向位置角为φ，证明

$$\tan(\varphi-\varphi_0)=\frac{\sin(\alpha-z_A)\sin\theta_A}{\cos\delta\cos\theta_A+\sin\delta\sin\theta_A\cos(\alpha-z_A)}$$

其中z_A和θ_A为赤道岁差参数，α和δ为观测历元时的赤道坐标。

2. 假设恒星相对于太阳的速度是常数，证明这表示它的视向速度在代数意义上总是增加，且有

$$\frac{dV_r}{dt}=4.74\frac{\mu^2}{\pi}\sin1''$$

3. 恒星在标准历元时位置矢量的分量为（x_0，y_0，z_0），若μ的变率被忽略，证明在t年后位置矢量的分量为

$$\begin{cases}x=x_0+\mu_x t-\frac{1}{2}(\mu t)^2x_0\\ y=y_0+\mu_y t-\frac{1}{2}(\mu t)^2y_0\\ z=z_0+\mu_z t-\frac{1}{2}(\mu t)^2z_0\end{cases}$$

4. 写出因自行的固有变化和岁差变化对自行变换的矢量公式。

5. 对历元1950.0时的巴纳德（Bernard）星有$\alpha=17^h55^m40^s$，$\delta=4°33'$，$\mu=10''.25$，$\varphi=256°$，$V_r=-108$公里/秒，$\pi=0''.546$，求当该星的视向速度为零时的历元为多少？并计算出在该历元时恒星的位置（相对于1950.0的赤道和春分点），自行和视差。

6. 已知在历元t_1时恒星位置为α_1、δ_1，自行为μ_{α_1}、μ_{δ_1}，计算因岁差变化在历元t_2时恒星的自行μ_{α_2}、μ_{δ_2}。岁差矩阵P为已知。

7. 已知恒星的位置矢量$\vec{r}=(x,\ y,\ z)^T$和速度矢量$\dot{\vec{r}}=(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})^T$，写出计算$\alpha$、$\delta$、$\mu_\alpha$、$\mu_\delta$、$\pi$、$V_r$的表达式。

8. 证明

$$V_r\sin\delta+\frac{4.74\mu_\delta\cos\delta}{\pi}=\text{常数}。$$

9. 推导出利用恒星视向速度进行统计分析的基本方程（5.122）式。

10. 计算历元$B1950.0$时银心的赤经和赤纬。

第六章　恒星位置的计算

第一节　恒星的位置

恒星的位置受到各种因素的影响而变化。这些因素是：大气折射、视差、光行差、岁差、章动和自行。这些因素使得天体的位置有平位置、真位置、视位置、站心位置和观测位置等的区别。

如果恒星的位置已给出，我们应该了解

（1）恒星的位置对应于什么历元（通常位置历元和定向历元相同）？

（2）恒星的位置参照于什么坐标系？也即对应的赤道和春分点如何选择？

（3）对应的坐标系的原点在何处？

恒星的位置对应的历元通常有星表历元，任意历元和观测历元。过去大部分星表都采用公历纪元数为25的整倍数的某年年首作为历元，例1875.0，1900.0，1925.0，1950.0等，它称为这本星表的星表历元。从1984年起新编的星表和历表的历元采用标准历元J2000.0作为星表历元。

恒星的位置参照于某一历元的平赤道和平春分点所确定的平赤道坐标系或真赤道和真春分点所确定的真赤道坐标系。不同历元的平赤道坐标系的变化是由于岁差引起的，同一历元的平赤道坐标系和真赤道坐标系的差异是由章动引起的。坐标系的定向历元和恒星的观测历元若不相同，其差异涉及到恒星的自行。

坐标系的原点（即天球的中心）有站心、地心、日心或太阳系质心。从站心到地心涉及到周日光行差和周日视差，从地心到日心或太阳系质心涉及到周年光行差和周年视差。

下面我们给出各种恒星位置的确切含意：

星表历元平位置：在一本星表中，所有恒星的坐标都对应于星表历元的平赤道坐标系，这叫星表历元平位置。坐标系的原点在日心或太阳系质心。

年首平位置：恒星对应于在某一儒略年首（或贝塞尔年首）的平赤道坐标系的日心或太阳系质心坐标。从观测归算要求来说，要选取观测瞬间所在年首。恒星在不同年首的平位置的差别是各年首之间的岁差和自行引起的。

观测历元平位置：恒星对应于在观测历元的平赤道坐标系的日心或太阳系质心坐标。年首平位置和观测历元平位置之差是年首到观测瞬间之间的岁差和恒星在此期间的自行。

真位置：恒星对应于在观测历元的真赤道坐标系的日心或太阳系质心坐标。它是对观测历元平位置作了章动改正后得到的。真位置仅仅是平位置和视位置相互变换时作联系和过渡使用。

视位置：恒星对应于在观测历元的真赤道坐标系的地心坐标。它是对真位置作了周年视差和周年光行差改正后得到的。

站心位置：恒星对应于在观测历元的真赤道坐标系的站心坐标。它是对视位置作了周日视差和周日光行差改正后得到的。它相当于一个位于站心的观测者在没有大气的情况下所见天体的位置。

观测位置：用天文仪器直接测定的对应于在观测历元的真赤道坐标系的天体位置，已消除了仪器误差的影响。

恒星的各种位置之间的关系可表达为下述式子

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{年首平位置}=\text{星表历元平位置}+\text{岁差}+\text{自行}\\
&\text{观测历元平位置}=\text{年首平位置}+\text{岁差}+\text{自行}\\
&\text{真位置}=\text{观测历元平位置}+\text{章动}\\
&\text{视位置}=\text{真位置}+\text{周年光行差}+\text{周年视差}\\
&\text{站心位置}=\text{视位置}+\text{周日光行差}+\text{周日视差}\\
&\text{站心位置}=\text{观测位置}+\text{大气折射}
\end{aligned}\right\} \qquad (6.1)
$$

图6.1表示联系位置、坐标系和原点间的有关因素。

在天文工作中，经常会遇到需要把恒星的星表历元平位置换算为观测历元的视位置，或把恒星的观测位置换算到星表历元平位置，利用(6.1)式就可进行这样的计算。在进行恒星位置的换算中，改正岁差、章动、光行差和视差的精密计算可以利用矩阵转换公式来完成，但对一般不要求非常高的精度的使用者，可通过历表提供的数值和表来进行。

星表历元平位置
平赤道坐标系
太阳系质心（或日心）

↓ 岁差、恒星自行

观测历元平位置
平赤道坐标系
太阳系质心（或日心）

↓ 章动

观测历元真位置
真赤道坐标系
太阳系质心（或日心）

↓ 周年光行差、周年视差

观测历元视位置
真赤道坐标系
地心

↓ 周日光行差、周日视差

观测历元站心位置
真赤道坐标系
站心

↓ 大气折射

观测历元观测位置
真赤道坐标系
观测者

图6.1 恒星的各种位置

第二节 利用历表计算恒星的视位置

假设恒星在星表历元t_0时的平位置α_0和δ_0为已知，我们要计算它在观测历元t时的视位置α和δ。

应用历表计算的方法，首先要计算观测历元那一年的年首平位置α_1，δ_1。不同瞬间的恒星平位置彼此的差别是岁差和自行造成的。当t_1-t_0不大时，$\alpha_1-\alpha_0$和$\delta_1-\delta_0$可表为泰勒级数，取前面三项（已足够满足各种精度的需要），有

$$
\alpha_1=\alpha_0+\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0(t_1-t_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0(t_1-t_0)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)_0(t_1-t_0)^3
$$

$$\delta_1=\delta_0+\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0(t_1-t_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0(t-t_0)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{d^3\delta}{dt^3}\right)_0(t_1-t_0)^3 \tag{6.2}$$

其中t_1-t_0是整数。

每本综合星表不仅给出了星表历元的平坐标α_0，δ_0，也给出了前面的三阶导数。上式的一阶导数$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$和$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0$分别称为赤经和赤纬的周年变化，简称年变。周年变化包含周年岁差和周年自行，可以表示为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0&=m+n\sin\alpha_0\tan\delta_0+\mu_{\alpha 0}\\ \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0&=n\cos\alpha_0+\mu_{\delta 0}\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

其中m和n是对应于星表历元时的速率值。

（6.2）式中的二阶导数$\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0$和$\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0$是小量，在星表中取它们100年的变化列出，称为长期变化或百年变化，记为SV_α SV_δ，即

$$\left.\begin{aligned}SV_\alpha&=100\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0\\ SV_\delta&=100\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

（6.4）式中的三阶导数$\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)_0$和$\left(\frac{d^3\delta}{dt^3}\right)_0$的值更小，一般可以忽略不计，只有对赤纬较大的恒星才有影响。通常在星表中把它们的值扩大一百万倍，然后与展式中的系数合并计算后列出，称为第三项，记为III_α和III_δ，即

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{III}_\alpha&=\frac{100^3}{6}\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)_0\\ \mathrm{III}_\delta&=\frac{100^3}{6}\left(\frac{d^3\delta}{dt^3}\right)_0\end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

于是（6.2）式可改写成下列形式

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\alpha_0+\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0(t_1-t_0)+\frac{SV_\alpha}{200}(t_1-t_0)^2+\frac{\mathrm{III}_\alpha}{100^3}(t_1-t_0)^3\\ \delta_1&=\delta_0+\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0(t_1-t_0)+\frac{SV_\delta}{200}(t_1-t_0)^2+\frac{\mathrm{III}_\delta}{100^3}(t_1-t_0)^3\end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

这就是计算观测历元那一年的年首平位置的公式。

由恒星的观测历元那一年的年首平位置α_1和δ_1来计算观测历元t时的视位置α和δ，可以根据（6.1）式按以下的步骤进行

（1）由年首平位置α_1和δ_1计算观测历元t的平位置α_2和δ_2应作由年首t_1到观测时刻t

期间的岁差和自行改正。令$\tau = t - t_1$，并以年为单位。当t在上半年，t_1取当年年首，当t在下半年，t_1取下一年年首。这样τ的采用值不超过0.5年。计算岁差改正时可只取一阶项。因此，由α_1和δ_1计算α_2和δ_2的公式分别为

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + (m + n\sin\alpha_1\tan\delta_1)\tau + \mu_\alpha\tau \\ \delta_2 &= \delta_1 + n\cos\alpha_1\tau + \mu_\delta\tau \end{aligned}\right\} \quad (6.7)$$

（2）由观测历元平位置α_2和δ_2计算观测历元真位置α_3和δ_3应加章动改正。根据(4.94)和(4.95)式可直接得到

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3 &= \alpha_2 + (\Delta\psi + d\psi)(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha_1\tan\delta_1) - (\Delta\varepsilon + d\varepsilon)\cos\alpha_1\tan\delta_1 \\ \delta_3 &= \delta_2 + (\Delta\psi + d\psi)\sin\varepsilon\cos\alpha_1 + (\Delta\varepsilon + d\varepsilon)\sin\alpha_1 \end{aligned}\right\} \quad (6.8)$$

其中$\Delta\psi$和$d\psi$分别为黄经章动长周期项和短周期项，$\Delta\varepsilon$和$d\varepsilon$分别为交角章动长周期项和短周期项。

（3）由观测历元真位置α_3和δ_3计算观测历元视位置α和δ应加周年视差和周年光行差的改正。对大多数恒星周年视差甚小，不需加改正；若周年视差较大，则可把周年视差并入周年光行差计算。根据(3.66)式有

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_3 + Cc + Dd \\ \delta &= \delta_3 + Cc' + Dd' \end{aligned}\right\} \quad (6.9)$$

或根据（3.68）式有

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_3 + \frac{1}{15}h\sin(H + \alpha_1)\sec\delta_1 \\ \delta &= \delta_3 + h\cos(H + \alpha_1)\sin\delta_1 + i\cos\delta_1 \end{aligned}\right\} \quad (6.10)$$

其中C，D为贝塞尔日数，h、H、i为独立日数，c、d、c'、d'为恒星常数。

实际计算时，总是把上述各步骤合并在一起计算，用一个较简单的公式可直接由年首平位置α_1和δ_1计算出视位置α和δ。有两种类型的计算公式被采用：

第一种计算公式

将（6.7）式代入（6.8）式，可得

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3 = \alpha_1 &+ (m + n\sin\alpha_1\tan\delta_1)\tau + (\Delta\psi + d\psi)\cos\varepsilon \\ &+ (\Delta\psi + d\psi)\sin\varepsilon\sin\alpha_1\tan\delta_1 - (\Delta\varepsilon + d\varepsilon)\cos\alpha_1\tan\delta_1 + \mu_\alpha\tau \\ \delta_3 = \delta_1 &+ n\cos\alpha_1\tau + (\Delta\psi + d\psi)\sin\varepsilon\cos\alpha_1 + (\Delta\varepsilon + d\varepsilon)\sin\alpha_1 + \mu_\delta\tau \end{aligned}\right\} \quad (6.11)$$

根据（4.24）和（4.26）式可将$\sin\varepsilon$和$\cos\varepsilon$分别表示为

$$\sin\varepsilon = \frac{n}{\psi}, \qquad \cos\varepsilon = \frac{m + \chi}{\psi} \quad (6.12)$$

其中ψ为黄经日月岁差周年速率，χ为赤经行星岁差周年速率。将（6.12）式代入（6.11）式，得

$$\alpha_3 = \alpha_1 + [n\tau + (\Delta\psi + d\psi)\sin\varepsilon]\left(\frac{m}{n} + \sin\alpha_1\tan\delta_1\right)$$

$$-(\Delta\varepsilon+d\varepsilon)\cos\alpha_1\tan\delta_1+(\Delta\psi+d\psi)\frac{\chi}{\psi}+\mu_\alpha\tau$$

$$\delta_3=\delta_1+[n\tau+(\Delta\psi+d\psi)\sin\varepsilon]\cos\alpha_1+(\Delta\varepsilon+d\varepsilon)\sin\alpha_1+\mu_\delta\tau \tag{6.13}$$

在上式中，我们用符号a、b、a'、b'表示和恒星坐标有关的因子，用符号A、B、A'、B'和E表示和时间有关的因子，这些符号分别定义为

$$\left.\begin{aligned}
&A=n\tau+\Delta\psi\sin\varepsilon, && a=\frac{1}{15}\left(\frac{m}{n}+\sin\alpha_1\tan\delta_1\right)\\
&A'=d\psi\sin\varepsilon && b=\frac{1}{15}\cos\alpha_1\tan\delta_1\\
&B=-\Delta\varepsilon && a'=\cos\alpha_1\\
&B'=-d\varepsilon && b'=-\sin\alpha_1\\
&E=\frac{\chi}{\psi}(\Delta\psi+d\psi)
\end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

将（6.14）式代入（6.13）式，则得下列简单形式

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_3&=\alpha_1+(A+A')a+(B+B')b+E+\mu_\alpha\tau\\
\delta_3&=\delta_1+(A+A')a'+(B+B')b'+\mu_\delta\tau
\end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

再将上式代入（6.9）式，最后可得

$$\left.\begin{aligned}
\alpha&=\alpha_1+(A+A')a+(B+B')b+Cc+Dd+E+\mu_\alpha\tau\\
\delta&=\delta_1+(A+A')a'+(B+B')b+Cc'+Dd'+\mu_\delta\tau
\end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

当周年视差大于0.″010时，应考虑它的影响。由（3.48）式知，它的改正为

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\alpha&=\pi(yc-xd)\\
\Delta\delta&=\pi(yc'-xd')
\end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

其中π为恒星的周年视差，x，y为太阳的地心赤道直角坐标。于是

$$\left.\begin{aligned}
\alpha&=\alpha_3+(C+\pi y)c+(D-\pi x)d\\
\delta&=\delta_3+(C+\pi y)c'+(D-\pi x)d'
\end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

因此周年视差的改正只需对贝塞尔日数C和D加修正即成。

在周年视差不大的情况时，根据（3.65）式可以得到

$$\left.\begin{aligned}
x&=\cos\lambda_\odot=-\frac{C\sec\varepsilon}{K}\\
y&=\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon=-\frac{D\cos\varepsilon}{K}
\end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

其中K为周年光行差常数，ε为黄赤交角。将上式代入（6.17）式，并将$K=20.''49552$和$\cos\varepsilon=0.91748$代入，于是（6.17）式简化为

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\alpha&=C\times0.0532\pi d-D\times0.0448\pi c\\
\Delta\delta&=C\times0.0532\pi d'-D\times0.0448\pi c'
\end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

因此（6.18）式可改写成

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \alpha_3 + C(c+\Delta c) + D(d+\Delta d)\\ \delta &= \delta_3 + C(c'+\Delta c') + D(d'+\Delta d')\end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

显然周年视差的改正也可仅对c，d，c'，d'分别加下列修正

$$\left.\begin{aligned}\Delta c &= +0.0532\pi d \qquad \Delta c' = +0.0532\pi d'\\ \Delta d &= -0.0448\pi c \qquad \Delta d' = -0.0448\pi c'\end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

当周年视差小于0.″2时，以上计算的误差可以忽略。

（6.16）式是计算观测历元视位置的第一种计算公式。式中A、B、A'、B'、E和C、D一样都称为贝塞尔日数。在中国天文年历的“贝塞尔日数表”中列出每日世界时0^h为准的这些贝塞尔日数的数值。a、b、a'、b'和c、d、c'、d'一样都称为恒星常数。某些星表在给出恒星位置的同时也给出恒星常数值。实际上恒星常数值是在缓慢地变化，所谓常数仅仅指它们和τ无关这个意义上说。μ_α和μ_δ一般在星表中也都列出。

第二种计算公式

将（6.13）式改写为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_3 &= \alpha_1 + (A+A')\left(\frac{m}{n} + \sin\alpha_1\tan\delta_1\right) + (B+B')\cos\alpha_1\tan\delta_1 + E + \mu_\alpha\tau\\ \delta_3 &= \delta_1 + (A+A')\cos\alpha_1 - (B+B')\sin\alpha_1 + \mu_\delta\tau\end{aligned}\right\} \qquad (6.23)$$

定义另一组符号

$$\left.\begin{aligned}f &= \frac{1}{15}\left[\frac{m}{n}(A+A') + E\right] = \frac{1}{15}\left[m\tau + (\Delta\psi + d\psi)\cos\varepsilon\right]\\ g\cos G &= A + A'\\ g\sin G &= B + B'\end{aligned}\right\} \qquad (6.24)$$

将上式代入（6.23）式，得

$$\left.\begin{aligned}\alpha_3 &= \alpha_1 + f + \frac{1}{15}g\sin(G+\alpha_1)\tan\delta_1 + \mu_\alpha\tau\\ \delta_3 &= \delta_1 + g\cos(G+\alpha_1) + \mu_\delta\tau\end{aligned}\right\} \qquad (6.25)$$

再将（6.25）式代入（6.10）式，最后可得

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 + f + \frac{1}{15}g\sin(G+\alpha_1)\tan\delta_1 + \frac{1}{15}h(H+\alpha_1)\sec\delta_1 + \mu_\alpha\tau\\ \delta &= \delta_1 + g\cos(G+\alpha_1) + h\cos(H+\alpha_1)\sin\delta_1 + i\cos\delta_1 + \mu_\delta\tau\end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

上式是计算观测历元视位置的第二种计算公式。式中f、g、G和h、H、i一样称为独立日数。在中国天文年历的“独立日数表”中列出每日世界时0^h为准的这些独立日数的数值，同时也列出了用于计算章动短周期项改正的独立日数f'、g'、G'，这三个独立日数的定义为

$$f' = \frac{1}{15}d\psi\cos\varepsilon$$

$$\left.\begin{aligned} g'\cos G &= A \\ g'\sin G' &= B' \end{aligned}\right\} \qquad (6.27)$$

若已知恒星的恒星常数或欲求一颗恒星的许多视位置，宜用贝塞尔日数进行计算，否则用独立日数较为简便。贝塞尔日数和独立日数都必须由表列基准时刻内插到观测时刻。由于内插是在一天之内进行的，用线性内插足以保证精度。

对 $|\delta|>60°$ 的恒星还要加二阶项改正，它们由下式计算

$$J_\alpha = \frac{1}{15}PQ\sin 1'' , \qquad J_\delta = -\frac{1}{2}P^2\sin 1'' \qquad (6.28)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} P &= (A+A'\pm D)\sin\alpha_1 + (B+B'\pm C)\cos\alpha_1 \\ &= g\sin(G+\alpha_1) \pm h\sin(H+\alpha_1) \\ Q &= (A+A'\pm D)\cos\alpha_1 - (B+B'\pm C)\sin\alpha_1 \\ &= g\cos(G+\alpha_1) \pm h\cos(H+\alpha_1) \end{aligned}\right\} \qquad (6.29)$$

上式中正号对应于赤纬为正的恒星，负号对应于赤纬为负的恒星。在中国天文年历的“二阶项订正系数表”中列出以日期和赤经为引数的 J_α 和 J_δ 的值。

从 1988 年开始中国天文年历计算恒星视位置所用的平位置是对应于儒略年年中的平位置，而不是年首平位置，因此贝塞尔日数以及二阶项订正等也是对应于当年年中的平春分点和平赤道的。τ 表示儒略年年中与观测瞬间相距的时间间隔，以儒略年为单位，在上半年，τ 为负值。

由平位置归算到视位置的过程中，过去一直没有考虑太阳引力场引起的光线偏转的影响。对于精密的观测和归算，这种影响应予考虑。恒星在太阳边缘时，偏转角达 1.″8；当天体对太阳的角距为 45° 时，其影响达 0.″011；角距等于 90° 时，影响为 0.″004。设天体的赤经和赤纬为 (α, δ)，太阳的赤经和赤纬为 $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$，天体对太阳的地心角距为 D，且 $0°\leqslant D\leqslant 180°$，光线的偏转角为 θ。根据（1.26）和（1.27）式可得到光线偏转引起的赤经和赤纬增量

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha &= \mu\sec\delta\cos\delta_\odot\sin(\alpha-\alpha_\odot) \\ \Delta\delta &= \mu\left[\sin\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha-\alpha_\odot) - \sin\delta_\odot\cos\delta\right] \end{aligned}\right\} \qquad (6.30)$$

其中

$$\mu = \frac{\theta}{\sin D} = 0.''00407\left(\frac{1}{1-\cos D} + \frac{1}{2}\cos D\right) \qquad (6.31)$$

$$\cos D = \sin\delta\sin\delta_\odot + \cos\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha-\alpha_\odot) \qquad (6.32)$$

例：求1991年5月3日在 0^hUT 时大熊座 φ（φ UMa）的视位置（不考虑光线偏转的影响）

已知此星在1991.5年的下列值：

$\alpha_1 = 9^h51^m31.^s900$，　　$\delta_1 = +54°06'15.''79$

$\mu_{\alpha 1} = -0.^s0006$，$\mu_{\delta 1} = +0.''020$，$\pi_1 = 0.''02$；

（1）利用贝塞尔日数

$m/n = 2.30104$　　$\sin\alpha_1 = +0.531651$,　　$\cos\alpha_1 = -0.846963$

$\sin\delta_1 = +0.810087$,　　$\cos\delta_1 = +0.586310$

$\tan\delta_1 = +1.381668$,　　$\sec\delta_1 = +1.705582$

$\varepsilon = 23°26'25''.66$　　$\tan\varepsilon = +0.433577$,

恒星常数

$a = \frac{1}{15}(\frac{m}{n} + \sin\alpha_1\tan\delta_1) = +0.20237$,　　$a' = \cos\alpha_1 = -0.8470$

$b = \frac{1}{15}\cos\alpha_1\tan\delta_1 = -0.07801$,　　$b' = -\sin\alpha_1 = -0.5317$

$c = \frac{1}{15}\cos\alpha_1\sec\delta_1 = -0.09630$,　　$c' = \tan\varepsilon\cos\delta_1 - \sin\alpha_1\sin\delta_1 = -0.1765$

$d = \frac{1}{15}\sin\alpha_1\sec\delta_1 = +0.06045$,　　$d' = \cos\alpha_1\sin\delta_1 = -0.6861$

从世界时0^h为准的贝塞尔日数表查得

$\tau = -0.1667$,　　$A + A' = +2''.450$,　　$B + B' = -3''.580$

$C = -14''.021$,　　$D = -13''.398$,　　$E = +0^s.0021$

视差对于恒星常数的修正为

$\Delta c = +0.0532\pi d = +0.00008$,　　$\Delta c' = +0.0532\pi d' = -0.0009$

$\Delta d = -0.0448\pi c = +0.00011$,　　$\Delta d' = -0.0448\pi c' = +0.0002$

对于$|\delta| < 60°$的恒星可以不必考虑J_a，J_δ的影响。

$\alpha_1 =$	$9^h51^m31^s.900$	$\delta_1 =$	$+54°06'15''.79$
$(A+A')a = +$	0.4958	$(A+A')a' = -$	2.075
$(B+B')b = +$	0.2793	$(B+B')b' = +$	1.903
$C(c+\Delta c) = +$	1.3491	$C(c'+\Delta c') = +$	2.487
$D(d+\Delta d) = -$	0.8114	$D(d'+\Delta d') = +$	9.190
$E = +$	0.0021	$\tau\mu_\delta = -$	0.003
$\tau\mu_a = +$	0.0001		
$\alpha =$	$9^h51^m33^s.215$	$\delta =$	$+54°06'27''.29$

（2）利用独立日数

由独立日数表查得并计算如下

$f = +0.3779$,　　$g = +4.338$,　　$h = +19.393$

$G = 20^h17^m32^s$,　　$H = 15^h05^m13^s$,　　$i = -6.079$

$G + \alpha_1 = 6^h09^m04^s$,　　$\sin(G+\alpha_1) = +0.9992$,　　$\cos(G+\alpha_1) = -0.0396$

$\tan\delta_1 = +1.3817$,　　$\sec\delta_1 = +1.7056$,　　$\cos\delta_1 = +0.5863$

$\frac{1}{15}g\tan\delta_1 = +0.3996$,　　$\frac{1}{15}h\sec\delta_1 = +2.2051$,　　$\sin\delta_1 = +0.8101$

$\sin(H+\alpha_1) = +0.2451$,　$\cos(H+\alpha_1) = +0.9695$,　　$h\sin\delta_1 = +15.7103$

$$\alpha_1 = 9^h51^m31\overset{s}{.}900 \qquad \delta_1 = +54°06'15\overset{''}{.}79$$

$$f = +\quad 0.3779 \qquad g\cos(G+\alpha_1) = -\quad 0.172$$

$$\frac{1}{15}g\sin(G+\alpha_1)\tan\delta_1 = +\quad 0.3993 \qquad h\cos(H+\alpha_1)\sin\delta_1 = +\quad 15.231$$

$$\frac{1}{15}h\sin(H+\alpha_1)\sec\delta_1 = +\quad 0.5405 \qquad i\cos\delta_1 = -\quad 3.654$$

$$\tau\mu_\alpha = +\quad 0.0001 \qquad \tau\mu_\delta = -\quad 0.003$$

$$\alpha = 9^h51^m33\overset{s}{.}2178 \qquad \delta = +54°06'27\overset{''}{.}282$$

视差订正

$$C\Delta c = -0.00112 \qquad C\Delta c' = +0.01262$$

$$D\Delta d = -0.00147 \qquad D\Delta d' = -0.00268$$

加上视差订正后得

$$\alpha = 9^h51^m33\overset{s}{.}215 \qquad \delta = +54°06'27\overset{''}{.}29$$

第三节　用直角坐标方法精确计算恒星的视位置

精确计算恒星的视位置可采用直角坐标的方法。设α_0和δ_0为恒星在星表历元t_0（采用标准历元J2000.0）时的平赤经和平赤纬，μ_{α_0}和μ_{δ_0}为对应的自行分量，分别以时秒／儒略世纪和角秒／儒略世纪为单位，π_0为周年视差，以角秒为单位，V_{r_0}为视向速度，以公里／秒为单位。现要计算在观测历元t时的视赤经和视赤纬。

首先考虑自行和视差的纯几何效应，并进行光行差改正，从而得到恒星在观测历元t时的方向，恒星所参照的的坐标系仍是星表历元的平赤道坐标系，但坐标系的原点已从太阳系质心平移到地心。然后进行岁差和章动的改正，使平赤道坐标系变换旋转到真赤道坐标系。采用这样的步骤计算上较方便，概念上较清楚，并和坐标系先旋转后平移的计算精度基本上是一致的。

在图6.2中，设O为太阳系质心，E为t时地球的位置，σ_0和σ_1分别为t_0和t时恒星的几何位置。通常这四点并不在同一个平面上。令$\vec{r}_0$，$\vec{R}+\vec{r}_1$和$\vec{R}$是σ_0，σ_1和E的质心位置矢量，有

图6.2　恒星的几何位置

$$\left.\begin{aligned}
\vec{r}_0 &= r_0\vec{S}_0 = r_0\begin{pmatrix}\cos\alpha_0\cos\delta_0\\ \sin\alpha_0\cos\delta_0\\ \sin\delta_0\end{pmatrix}\\
\vec{r}_1 &= r_1\vec{S}_1\\
\vec{R} &= \begin{pmatrix}x_e\\ y_e\\ z_e\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

其中x_e，y_e，z_e可从天文年历的"地球的质心位置和速度表"中查得，它们的单位为天文单位（AU）。

计算恒星在t_0时的距离r_0，用AU为单位

$$r_0 = 1/\sin\pi_0 \simeq \left(\frac{1}{\pi_0}\right)\left(\frac{3600\times 360}{2\pi}\right) \tag{6.34}$$

将赤经自行，赤纬自行和视向速度的值变换为以AU/日为单位

$$\left.\begin{aligned} \mu'_{\alpha_0} &= 15\mu_{\alpha_0}/(36525\pi_0) \\ \mu'_{\delta_0} &= \mu_{\delta_0}/(36525\pi_0) \\ V'_{r_0} &= 86400V_{r_0}/A \end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

其中$A = 1.49597870\times 10^8$公里/AU。

恒星的空间速度$\vec{V}$如在第五章第一节中所述可以认为是常数，若$\vec{V}$用AU/日为单位，根据(5.35)和（6.35）式有

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} -\cos\delta_0\sin\alpha_0 & -\sin\delta_0\cos\alpha_0 & \cos\delta_0\cos\alpha_0 \\ \cos\delta_0\cos\alpha_0 & -\sin\delta_0\sin\alpha_0 & \cos\delta_0\sin\alpha_0 \\ 0 & \cos\delta_0 & \sin\delta_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu'_{\alpha_0} \\ \mu'_{\delta_0} \\ V'_{r_0} \end{pmatrix} \tag{6.36}$$

由图6.2可得

$$r_1\vec{S}_1 = \vec{r}_0 + \vec{V}\tau - \vec{R} \tag{6.37}$$

其中$\tau = t - t_0$。由上式可求得$\vec{S}_1$，它为恒星在观测历元t相对地心为原点的平赤道坐标系的位置单位矢量，这里自行和周年视差都已进行了改正。

对周年光行差若仅考虑一阶改正，则可利用（3.70）式，即

$$\vec{r}_2 = \frac{c'}{c}\vec{S}_2 = \vec{S}_1 + \frac{\dot{\vec{R}}}{c} \tag{6.38}$$

其中c'为光相对地球的速度，$\vec{S}_2$为运动的观测者看到天体的方向，$c = 173.144633$AU/日为光速。

$$\dot{\vec{R}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{pmatrix} \tag{6.39}$$

$\dot{x}_e$，$\dot{y}_e$，$\dot{z}_e$可从天文年历的"地球的质心位置和速度表"中查得，它们的单位为AU/日。

然后需要进行坐标系的转换，将星表历元的平赤道坐标系转换到观测历元的真赤道坐标系。由（4.79）式可计算三个赤道岁差参数

$$\left.\begin{aligned} \zeta_A &= 2306''.2181\tau + 0''.30188\tau^2 + 0''.017998\tau^3 \\ z_A &= 2306''.2181\tau + 1''.09468\tau^2 + 0''.018203\tau^3 \\ \theta_A &= 2004''.3109\tau - 0''.42665\tau^2 - 0''.041833\tau^3 \end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

利用岁差矩阵P，从而得到在t时的恒星相对以地心为原点的t时的平赤道坐标系的位置矢量

$$\vec{r}_3 = P\vec{r}_2 \tag{6.41}$$

岁差矩阵P可由（4.76）和（4.77）式计算。

利用IAU1980章动序列表根据（4.86）式可计算t时黄经章动$\Delta\psi$和交角章动$\Delta\varepsilon$值，或

直接从中国天文年历表中按t进行内插求得。中国天文年历的"太阳表"中列出每天黄经章动的长周期项和短周期项，交角章动没有直接列出，它就等于"贝塞尔日数表"中的$-(B+B')$，$-B$是交角章动长周期项，$-B'$是短周期项。由（4.100）式可计算t时的平黄赤交角

$$\varepsilon = 23°26'21''.448 - 46''.8150\tau - 0''.00059\tau^2 + 0''.001813\tau^3 \tag{6.42}$$

利用章动矩阵N，得到在t时的恒星相对以地心为原点的t时的真赤道坐标系的位置矢量

$$\vec{r}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = N\vec{r}_3 \tag{6.43}$$

章动矩阵N可由（4.98）和（4.99）式计算。

使用岁差章动旋转矩阵A可代替岁差矩阵和章动矩阵的运算

$$A = N \cdot P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{6.44}$$

天文历表中列出了矩阵A各元素每天的值，可按观测历元t进行内插。将（6.41）和（6.43）式联合起来，得

$$\vec{r}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = A\vec{r}_2 \tag{6.45}$$

于是恒星在t时的视赤经和视赤纬为

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \tan^{-1}(y_4/x_4) \\ \delta = \tan^{-1}(z_4/\sqrt{x_4^2 + y_4^2}) \end{array}\right\} \tag{6.46}$$

使用计算机按上述方法计算恒星的视位置既准确又方便。对精度要求较高恒星视位置的计算，则还需考虑光线引力弯曲的影响和恒星光行差的二阶项。第八章第八节中将对恒星视位置的计算作进一步讨论。

例：已知FK5星538在标准历元J2000.0的下列值

$\alpha_0 = 14^h39^m36^s.087$，　　　$\delta_0 = -60°50'07''.14$

$\mu_{\alpha_0} = -49^s.486$/儒略世纪，　　$\mu_{\delta_0} = +69''60$/儒略世纪

$\pi_0 = 0''.752 = 3.6458\times10^{-6}$弧度，$V_{r_0} = -22.2$公里/秒

求1993年1月1日0^h TDT时的视位置。

计算步骤如下：

（1）确定观测历元

1993年1月1日0^h TDT时对应于儒略日为2448988.5。对恒星有

$t = TDB \simeq TDT = JD2448988.5$

$\tau = t - t_0 = 2448988.5 - 2451545.0 = -2556.5$日

（2）从天文历表"地球的质心位置和速度表"中查取$\vec{R}$和$\dot{\vec{R}}$

矢量	儒略日	X	Y	Z
$\vec{R}$	2448988.5	−0.180034964	+0.890581313	+0.386046052
$\dot{\vec{R}}$	2448988.5	−0.017186742	−0.002985716	−0.001294251

（3）计算恒星在观测历元t相对地心为原点的平赤道坐标系的位置单位矢量$\vec{S}_1$

$\cos\alpha_0 = -0.767161093$，　　$\sin\alpha_0 = -0.641454485$

$\cos\delta_0 = +0.487321504$，　　$\sin\delta_0 = -0.873222624$

$\cos\alpha_0\cos\delta_0 = -0.373854097$，　　$\cos\alpha_0\sin\delta_0 = +0.669902422$

$\sin\alpha_0\cos\delta_0 = -0.312594564$，　　$\sin\alpha_0\sin\delta_0 = +0.560132568$

$$\vec{S}_0 = (-0.373854097,\ -0.312594564,\ -0.873222624)$$

$$\frac{1}{r_0} = \pi_0 \times \frac{2\pi}{3600\times 360} = +0.000003646$$

$$\mu'_{\alpha_0} = 15\mu_{\alpha_0}/(36525\pi_0) = -0.027024990$$

$$\mu'_{\delta_0} = \mu_{\delta_0}/(36525\pi_0) = +0.002533968$$

$$V'_{r_0} = 86400V_{r_0}/A = -0.012821571$$

$-\cos\delta_0\sin\alpha_0\mu'_{\alpha_0} = -0.008447865$，　　$-\sin\delta_0\cos\alpha_0\mu'_{\delta_0} = -0.001697511$

$\cos\delta_0\cos\alpha_0V'_{r_0} = +0.004793397$，　　$\cos\delta_0\cos\alpha_0\mu'_{\alpha_0} = +0.010103403$

$-\sin\delta_0\sin\alpha_0\mu'_{\delta_0} = -0.001419358$，　　$\cos\delta_0\sin\alpha_0V'_{r_0} = +0.004007954$

$\cos\delta_0\mu'_{\delta_0} = +0.001234857$，　　$\sin\delta_0V'_{r_0} = +0.011196086$

$$\vec{V} = (-0.005351979,\ +0.012691999,\ +0.012430943)$$

$$\frac{r_1}{r_0}\vec{S}_1 = \vec{S}_0 + \frac{\vec{V}}{r_0}\tau - \frac{\vec{R}}{r_0}$$

$$\frac{\vec{V}}{r_0}\tau = (+0.000049886,\ -0.000118302,\ -0.000115869)$$

$$\frac{\vec{R}}{r_0} = (-0.000000656,\ +0.000003247,\ +0.000001408)$$

$$\frac{r_1}{r_0}\vec{S}_1 = (-0.373803555,\ -0.312716113,\ -0.873339901)$$

$$\left|\frac{r_1}{r_0}\vec{S}_1\right| = \frac{r_1}{r_0} = 1.000121516$$

$$\vec{S}_1 = (-0.373758137,\ -0.312678117,\ -0.873233789)$$

（4）进行光行差改正

$$\vec{r}_2 = \vec{S}_1 + \frac{\dot{\vec{R}}}{c},\quad c = 173.144633\text{AU/日}$$

$$\frac{\dot{\vec{R}}}{c} = (-0.000099262,\ -0.000017244,\ -0.000007475)$$

$$\vec{r}_2 = (-0.373857399,\ -0.312695361,\ -0.873241264)$$

（5）进行岁差和章动改正

从天文历表“岁差章动旋转矩阵元素表”中查得A为

$$A=\begin{pmatrix} +0.99999868 & +0.00148796 & +0.00064669 \\ -0.00148797 & +0.99999889 & +0.00000878 \\ -0.00064667 & -0.00000974 & +0.99999979 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r_4}=A\vec{r_2}$$

$$\vec{r_4}=(-0.374886900,\ -0.312146392,\ -0.872996272)$$

（6）转换为球面坐标

$$(x_4^2+y_4^2)^{\frac{1}{2}}=0.487827385$$

$$y_4/x_4=0.832641503,\quad z_4/\sqrt{(x_4^2+y_4^2)}=-1.789559789$$

$$\alpha=\tan^{-1}(y_4/x_4)=219^\circ46'55''.81=14^h39^m07^s.721$$

$$\delta=\tan^{-1}(z_4/\sqrt{x_4^2+y_4^2})=-60^\circ48'13''.28$$

第四节　FK4系统到FK5系统的转换

按照1976年召开的IAU第十六届大会的决议，从1984年1月1日起各国天文历表采用 IAU 1976天文常数系统、1980IAU章动理论、以及新的格林尼治恒星时和世界时关系的表达式，同时，代表基本参考系的FK4系统由FK5系统所代替。参考系变换过程包括如下转换内容

（1）采用新的标准历元J2000.0和质心力学时TDB尺度。将星位和自行从 B1950.0 转换到J2000.0；

（2）用儒略世纪代替回归世纪作为时间单位；

（3）在FK4系统的赤经和赤纬自行中加上分点改正和分点运动改正；

（4）从星表位置中消除光行差E项；

（5）对自行系统进行岁差常数的改正；

（6）对FK4星加上系统改正和个别改正“FK5－FK4”。

新的基本参考系由 FK5 星表给出的恒星位置和自行定义。在 FK5 星表中消除了分点改正和分点运动改正。由于 FK4 星表中所有恒星的赤经都加上分点改正值，由图 1.12 可知，这必须使格林尼治恒星时或经度两者中改变一个，由于不希望在观测者处的经度上加上依赖于时间的改正，因而选择对格林尼治恒星时进行改正。为在引进分点改正值时使世界时在数值和速率上保持连续，不产生跳跃，采用了世界时 0^h的格林尼治平恒星时新的表达式（1.76）式。

光行差E项又称椭圆项，其最大振幅为$0''.34$，由于它和太阳黄经无关，并且变化微小，过去被归并在恒星平位置中以简化光行差改正的计算。如在第三章第三节里所述，随着计算机的使用和精度的日益提高，把E项隐含在天体平位置的做法引起许多不便。因此对标准历元J2000.0恒星的平位置将不再包含光行差E项，这时在计算恒星视位置时应根据地球相对于太阳系质心的速度矢量严格计算恒星光行差。

FK4星表是根据1960年前的观测编制的。在归算到FK5星表前，光行差E项应从FK4星

表系统中消除掉。设恒星对B1950FK4星表位置的单位矢量为

$$\vec{r}_0=\begin{pmatrix}\cos\delta_0\cos\alpha_0\\ \cos\delta_0\sin\alpha_0\\ \sin\delta_0\end{pmatrix} \tag{6.47}$$

由（3.22）和（3.71）式可得改正光行差E项后恒星位置的单位矢量

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\frac{1}{c}\vec{r}_0\times(\vec{r}_0\times\vec{V}_2)=\vec{r}_0-\vec{A}+\vec{r}_0(\vec{r}_0\cdot\vec{A}) \tag{6.48}$$

其中

$$\vec{A}=\frac{1}{c}\vec{V}_2=Ke\begin{pmatrix}\sin\tilde{\omega}\\ -\cos\varepsilon\cos\tilde{\omega}\\ -\sin\varepsilon\cos\tilde{\omega}\end{pmatrix} \tag{6.49}$$

K为周年光行差常数，e为轨道偏心率，ε为黄赤交角，$\tilde{\omega}$为太阳轨道近地点黄经

$$\left.\begin{aligned}K&=20''.49552(\mathrm{J}2000.0)\\ e&=0.01673011-0.00004193(t-t_0)-0.000000126(t-t_0)^2\\ \varepsilon&=23°26'44''.836-46''.8495(t-t_0)-0''.00319(t-t_0)^2+0''.00181(t-t_0)^3\\ \tilde{\omega}&=282°04'49''.951+6190''.67(t-t_0)+1''.65(t-t_0)^2+0''.012(t-t_0)^3\end{aligned}\right\} \tag{6.50}$$

t_0为B1950.0＝JD2433282.42345905，$t-t_0$以儒略世纪为单位。

对B1950.0，由（6.49）和（6.50）式可得 （6.51）

$$\vec{A}=10^{-6}\begin{pmatrix}+1.62557\\ -0.31919\\ -0.13843\end{pmatrix}\quad（弧度）$$

若将（6.48）式表示成赤道球面坐标的形式，则有

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha_0-(\Delta C\cos\alpha_0+\Delta D\sin\alpha_0)\sec\delta_0\\ \delta&=\delta_0-(\Delta D\cos\alpha_0-\Delta C\sin\alpha_0)\sin\delta_0-\Delta C\tan\varepsilon\cos\delta_0\end{aligned}\right\} \tag{6.52}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\Delta C&=-Ke\cos\varepsilon\cos\tilde{\omega}\\ \Delta D&=-Ke\sin\tilde{\omega}\end{aligned}\right\} \tag{6.53}$$

对B1950.0，有

$$\Delta C=-0''.065838,\ \Delta D=+0''.335299,\ \Delta C\tan\varepsilon=-0''.028553 \tag{6.54}$$

将（6.54）式代入（6.52）式，得

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha_0+0^s.022780\sin(\alpha+11^h15^m33^s.8)\sec\delta\\ \delta&=\delta_0+0''.34170\cos(\alpha+11^h15^m33^s.8)\sin\delta+0''.028553\cos\delta\end{aligned}\right\} \tag{6.55}$$

光行差E项长期变化的影响也应从FK4星表恒星速度中消除掉。由（6.48）式可得

$$\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}_0-\dot{\vec{A}}+\vec{r}_0(\vec{r}_0\cdot\dot{\vec{A}}) \tag{6.56}$$

其中

$$\dot{\vec{A}} = Ke\dot{\tilde{\omega}}\begin{pmatrix}\cos\tilde{\omega} \\ \cos\varepsilon\sin\tilde{\omega} \\ \sin\varepsilon\sin\tilde{\omega}\end{pmatrix} \quad (6.57)$$

对B1950.0有

$$\dot{\vec{A}} = 10^{-8}\begin{pmatrix}1.245 \\ -1.580 \\ -0.659\end{pmatrix} \text{（角秒/回归世纪）} \quad (6.58)$$

将（6.56）式表示成赤道球面坐标的形式，有

$$\left.\begin{aligned}\mu_\alpha &= \mu_{\alpha_0} - (\Delta\dot{C}\cos\alpha_0 + \Delta\dot{D}\sin\alpha_0)\sec\delta_0 - \mu_{\alpha_0}(-\Delta C\sin\alpha_0 \\ &\quad + \Delta D\cos\alpha_0)\sec\delta_0 - \mu_{\delta_0}(\Delta C\cos\alpha_0 + \Delta D\sin\alpha_0)\tan\delta_0\sec\delta_0 \\ \mu_\delta &= \mu_{\delta_0} - (\Delta\dot{D}\cos\alpha_0 - \Delta\dot{C}\sin\alpha_0)\sin\delta_0 - \mu_{\alpha_0}(-\Delta D\sin\alpha_0 \\ &\quad - \Delta C\cos\alpha_0)\sin\delta_0 - \mu_{\delta_0}(\Delta D\cos\alpha_0 - \Delta C\sin\alpha_0)\cos\delta_0 \\ &\quad - (\Delta\dot{C}\tan\varepsilon + \Delta C\dot{\varepsilon}\sec^2\varepsilon)\cos\delta_0 + \mu_{\delta_0}\Delta C\tan\varepsilon\sin\delta_0\end{aligned}\right\} \quad (6.59)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\Delta\dot{C} &= Ke\dot{\tilde{\omega}}\cos\varepsilon\sin\tilde{\omega} - K(\dot{e}\cos\varepsilon - e\dot{\varepsilon}\sin\varepsilon)\cos\tilde{\omega} \\ \Delta\dot{D} &= -K\dot{e}\sin\tilde{\omega} - Ke\dot{\tilde{\omega}}\cos\tilde{\omega}\end{aligned}\right\} \quad (6.60)$$

对B1950.0，有

$$\left.\begin{aligned}&\dot{e} = -0.00004193/\text{回归世纪},\ \dot{\tilde{\omega}} = +6190''.54/\text{回归世纪},\ \dot{\varepsilon} = -46''.8485/\text{回归世纪} \\ &\Delta\dot{C} = -0''.001580/\text{回归世纪},\ \Delta\dot{D} = -0''.001245/\text{回归世纪}\end{aligned}\right\} \quad (6.61)$$

在目前精度范围光行差E项长期变化的影响可以不必考虑。

岁差常数值的变更将影响恒星的自行系统。FK4星表列出的恒星自行是根据纽康的岁差常数值计算的，若黄经日月岁差速率和赤经行星岁差速率的改正值分别为$\Delta\psi_1$和$\Delta\chi_1$，则根据（4.22）、（4.24）和（4.26）式有

$$\left.\begin{aligned}\Delta p &= \Delta\psi - \Delta\chi\cos\varepsilon \\ \Delta m &= \Delta\psi\cos\varepsilon - \Delta\chi \\ \Delta n &= \Delta\psi\sin\varepsilon\end{aligned}\right\} \quad (6.62)$$

于是新的岁差矩阵为

$$\begin{aligned}P' &= R_Y((n+\Delta n)\tau)R_Z(-(m+\Delta m)\tau) \\ &= R_Y(\Delta n\tau)\cdot R_Z(-\Delta m\tau)\cdot P\end{aligned} \quad (6.63)$$

其中P为原来的岁差矩阵

由于岁差常数的变更并不影响恒星在平赤道坐标系中的位置，因此有

$$P'M'\,[\text{CIRS}] = PM\,[\text{CIRS}] \quad (6.64)$$

中〔CIRS〕表示恒星在CIRS中方向的单位矢量。

将（6.63）式代入上式，可以求得新的自行矩阵和原来的自行矩阵的关系

$$M' = R_Y(-\Delta n\tau)R_Z(\Delta m\tau)\cdot M$$

将上式表示成赤道球面坐标的形式

$$\left.\begin{aligned}\mu'_\alpha &= \mu_\alpha - \Delta m - \Delta n\sin\alpha\tan\delta \\ \mu'_\delta &= \mu_\delta - \Delta n\cos\alpha\end{aligned}\right\}$$

（6.65）或（6.66）式就是在岁差常数变更后计算新的自行的公式。

计算从FK4系统到FK5 系统的转换，可采用直角坐标或球面坐标 。采用球面

计算通常仅取到一阶项。设在B1950.0时FK4系统恒星的位置为α_0、δ_0，自行为μ

视差为π_0，视向速度为V_0，现要计算在J2000.0时FK5系统恒星相应的这些量。

（1）计算矢量$\vec{r}_0$　$\dot{\vec{r}}_0$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix}\cos\delta_0\cos\alpha_0 \\ \cos\delta_0\sin\alpha_0 \\ \sin\delta_0\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}_0 = 15\mu_{\alpha_0}\begin{pmatrix}-\cos\delta_0\sin\alpha_0 \\ \cos\delta_0\cos\alpha_0 \\ 0\end{pmatrix} + \mu_{\delta_0}\begin{pmatrix}-\sin\delta_0\cos\alpha_0 \\ -\sin\delta_0\sin\alpha_0 \\ \cos\delta_0\end{pmatrix} + SV_0\pi_0\vec{r}_0$$

其中μ_{α_0}和μ_{δ_0}的单位分别为时秒/回归世纪和角秒/回归世纪，π_0的单位为角秒，

为公里/秒，$S = (86400\times36524.2198782)/(1.49597870\times10^8) = 21.094502$为单位

到天文单位/回归世纪的转换因子，$\vec{r}_0$为单位矢量，单位为弧度，$\dot{\vec{r}}_0$的单位为角

纪。若视差π_0和视向速度V_0未知，则（6.68）式右端第三项可不考虑。

（2）消去光行差E项的影响

由（6.48）和（6.56）式有

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_0 - \vec{A} + \vec{r}_0(\vec{r}_0\cdot\vec{A}) \\ \dot{\vec{r}}_1 &= \dot{\vec{r}}_0 - \dot{\vec{A}} + \vec{r}_0(\vec{r}_0\cdot\dot{\vec{A}})\end{aligned}\right\}$$

其中$\vec{A}$和$\dot{\vec{A}}$的表达式分别给出在（6.51）和（6.58）式。

或由（6.55）和（6.59）式有

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_0 + 0^s.022780\sin(\alpha_0 + 11^h15^m33^s.8)\sec\delta_0 \\ \delta_1 &= \delta_0 + 0''.34170\cos(\alpha_0 + 11^h15^m33^s.8)\sin\delta_0 + 0''.028553\cos\delta_0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_{\alpha_1} &= \mu_{\alpha_0} + (0^s.000105\cos\alpha_0 + 0^s.000083\sin\alpha_0)\sec\delta_0 \\ &\quad - \mu_{\alpha_0}(0^s.004389\sin\alpha_0 + 0^s.022353)\sec\delta_0 - (0^s.004389\cos\alpha_0 \\ &\quad - 0^s.022353)\tan\delta_0\sec\delta_0 \\ \mu_{\delta_1} &= \mu_{\delta_0} + (0''.001245\cos\alpha_0 - 0''.001580\sin\alpha_0)\sin\delta_0 \\ &\quad + \mu_{\alpha_0}(0''.335299\sin\alpha_0 - 0''.065838\cos\alpha_0)\sin\delta_0 \\ &\quad - \mu_{\delta_0}(0''.335299\cos\alpha_0 + 0''.065838\sin\alpha_0)\cos\delta_0 \\ &\quad - 0''.028553\mu_{\delta_0}\sin\delta_0 + 0''.000667\cos\delta_0\end{aligned}\right\}$$

将（6.63）式代入上式，可以求得新的自行矩阵和原来的自行矩阵的关系

$$M' = R_Y(-\Delta n\tau)R_Z(\Delta m\tau)\cdot M \tag{6.65}$$

将上式表示成赤道球面坐标的形式

$$\left.\begin{aligned} \mu_\alpha' &= \mu_\alpha - \Delta m - \Delta n\sin\alpha\tan\delta \\ \mu_\delta' &= \mu_\delta - \Delta n\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{6.66}$$

（6.65）或（6.66）式就是在岁差常数变更后计算新的自行的公式、

计算从FK4系统到FK5 系统的转换，可采用直角坐标或球面坐标 。采用球面坐标方法计算通常仅取到一阶项。设在B1950.0时FK4系统恒星的位置为α_0、δ_0，自行为μ_{α_0}、μ_{δ_0}，视差为π_0，视向速度为V_0，现要计算在J2000.0时FK5系统恒星相应的这些量。

（1）计算矢量$\vec{r}_0$　$\dot{\vec{r}}_0$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} \cos\delta_0\cos\alpha_0 \\ \cos\delta_0\sin\alpha_0 \\ \sin\delta_0 \end{pmatrix} \tag{6.67}$$

$$\dot{\vec{r}}_0 = 15\mu_{\alpha_0}\begin{pmatrix} -\cos\delta_0\sin\alpha_0 \\ \cos\delta_0\cos\alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_{\delta_0}\begin{pmatrix} -\sin\delta_0\cos\alpha_0 \\ -\sin\delta_0\sin\alpha_0 \\ \cos\delta_0 \end{pmatrix} + SV_0\pi_0\vec{r}_0 \tag{6.68}$$

其中μ_{α_0}和μ_{δ_0}的单位分别为时秒/回归世纪和角秒/回归世纪，π_0的单位为角秒，V_0的单位为公里/秒，$S = (86400\times36524.2198782)/(1.49597870\times10^8) = 21.094502$为单位从公里/秒到天文单位/回归世纪的转换因子，$\vec{r}_0$为单位矢量，单位为弧度，$\dot{\vec{r}}_0$的单位为角秒/回归世纪。若视差$\pi_0$和视向速度$V_0$未知，则（6.68）式右端第三项可不考虑。

（2）消去光行差E项的影响

由（6.48）和（6.56）式有

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_0 - \vec{A} + \vec{r}_0(\vec{r}_0\cdot\vec{A}) \\ \dot{\vec{r}}_1 &= \dot{\vec{r}}_0 - \dot{\vec{A}} + \vec{r}_0(\vec{r}_0\cdot\dot{\vec{A}}) \end{aligned}\right\} \tag{6.69}$$

其中$\vec{A}$和$\dot{\vec{A}}$的表达式分别给出在（6.51）和（6.58）式。

或由（6.55）和（6.59）式有

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + 0^s.022780\sin(\alpha_0 + 11^h15^m33^s.8)\sec\delta_0 \\ \delta_1 &= \delta_0 + 0''.34170\cos(\alpha_0 + 11^h15^m33^s.8)\sin\delta_0 + 0''.028553\cos\delta_0 \end{aligned}\right\} \tag{6.70}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\alpha_1} = \mu_{\alpha_0} &+ (0^s.000105\cos\alpha_0 + 0^s.000083\sin\alpha_0)\sec\delta_0 \\ &- \mu_{\alpha_0}(0^s.004389\sin\alpha_0 + 0^s.022353)\sec\delta_0 - (0^s.004389\cos\alpha_0 \\ &- 0^s.022353)\tan\delta_0\sec\delta_0 \\ \mu_{\delta_1} = \mu_{\delta_0} &+ (0''.001245\cos\alpha_0 - 0''.001580\sin\alpha_0)\sin\delta_0 \\ &+ \mu_{\alpha_0}(0''.335299\sin\alpha_0 - 0''.065838\cos\alpha_0)\sin\delta_0 \\ &- \mu_{\delta_0}(0''.335299\cos\alpha_0 + 0''.065838\sin\alpha_0)\cos\delta_0 \\ &- 0''.028553\mu_{\delta_0}\sin\delta_0 + 0''.000667\cos\delta_0 \end{aligned}\right\} \tag{6.71}$$

（3）在历元B1950.进行FK4系统到FK5系统的转换，这包括岁差常数值变更的影响，零点改正的应用以及时间单位从回归世纪改变为儒略世纪。若求得的恒星在历元B1950.0 FK5系统的位置和速度矢量矢量分别为$\vec{r}_2$、$\dot{\vec{r}}_2$，则有

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_2 \\ \dot{\vec{r}}_2 \end{pmatrix} = P^{-1}_{IAU76}(B1950, B1950, 1)\cdot Q_3(-E_{1950}, -\dot{E})\cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & FI \end{pmatrix}$$

$$\cdot P_{NEWC}(B1950, B1950, 1)\cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \dot{\vec{r}}_1 \end{pmatrix} \quad (6.72)$$

其中I是单位矩阵，F是儒略世纪和回归世纪之比，由（1.116）式给出；分点改正E_{1950}和分点运动$\dot{E}$的数值由（1.50）式给出，即

$$\left.\begin{aligned} E_{1950} &= 0^s.035 = 0''.5250 \\ \dot{E} &= 0^s.085/\text{世纪} = 1''.2750/\text{世纪} \end{aligned}\right\} \quad (6.73)$$

从历元T_1到历元T_2的岁差矩阵P由下式定义

$$P(T_1, T_2, 1) = Q_Z(-z_A, -\dot{z}_A)\cdot Q_Y(\theta_A, \dot{\theta}_A)\cdot Q_Z(-\zeta_A, -\dot{\zeta}_A) \quad (6.74)$$

ζ_A，θ_A，z_A是三个赤道岁差参数，P^{-1}是它的逆矩阵，下标IAU76和NEWC分别代表基于IAU1976岁差值和纽康岁差值，这样矩阵$P(T, T, 1)$实现了在历元T时从惯性坐标系到旋转坐标系的转换；基于IAU1976岁差常数的三个赤道岁差参数表达式给出在表4.3，基于纽康岁差常数的三个赤道岁差参数表达式给出在（4.44）—（4.48）式，矩阵Q_i由下式定义

$$Q_i(\phi, \dot{\phi}) = \begin{pmatrix} R_i(\phi) & 0 \\ \dot{\phi}\dfrac{\partial}{\partial\phi}R_i(\phi) & R_i(\phi) \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

$R_i(\phi)$是绕第i轴旋转ϕ角的3×3正交矩阵，由（1.19）—（1.21）式定义，$\dot{\phi}$的单位是角秒/世纪。

（6.72）式对应的球面赤道坐标表达式为

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + E_{1950} \\ \delta_2 &= \delta_1 \\ \mu_{\alpha 2} &= F\mu_{\alpha 1} - (m' - Fm) - [n'\sin(\alpha_1 + E_{1950}) - Fn\sin\alpha_1]\tan\delta_1 + \dot{E} \\ \mu_{\delta 2} &= F\mu_{\delta 1} - n'\cos(\alpha_1 + E_{1950}) + n\cos\alpha_1 \end{aligned}\right\} \quad (6.76)$$

其中m'、n'和m、n分别为基于IAU1976和纽康岁差值的赤经岁差速率和赤纬岁差速率。

（4）将参照的坐标系进行从B1950.0到J2000.0的岁差变换

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_3 \\ \dot{\vec{r}}_3 \end{pmatrix} = P_{IAU76}(B1950, J2000, 0)\cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_2 \\ \dot{\vec{r}}_2 \end{pmatrix} \quad (6.77)$$

其中

$$P_{IAU76}(B1950, J2000, 0) = Q_Z(-z_A)Q_Y(\theta_A)Q_Z(-\zeta_A) \tag{6.78}$$

上式即（4.75）式中的岁差矩阵，起算历元为B1950.0，目标历元为J2000.0。

（6.77）式对应的球面赤道坐标表达式由（4.25）和（5.54）式给出，即

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_3 &= \alpha_2 + (m' + n'\sin\alpha_2\tan\delta_2)\tau \\
\delta_3 &= \delta_2 + n'\cos\alpha_2\,\tau \\
\mu_{\alpha_3} &= \mu_{\alpha_2} + n'(\mu_{\alpha_2}\cos\alpha_2\tan\delta_2 + \mu_{\delta_2}\sin\alpha_2\sec^2\delta_2)\tau \\
\mu_{\delta_3} &= \mu_{\delta_2} - n'\mu_{\alpha_2}\sin\alpha_2\,\tau
\end{aligned}\right\} \tag{6.79}$$

其中τ是从B1950.0到J2000.0以儒略世纪为单位的历元差

$$\tau = (2451545 - 2433282.42345905)/36525 \tag{6.80}$$

（5）改正由位置历元变化引起的星位变化

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \dot{\vec{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \tau I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{r}_3 \\ \dot{\vec{r}}_3 \end{pmatrix} \tag{6.81}$$

由上式可得到$\vec{r}$和$\dot{\vec{r}}$在赤道直角坐标系的分量x、y、z和$\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$。

（6）计算在J2000.0时FK5系统恒星的位置、自行、视差和视向速度

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \tan^{-1}(y/x) \\
\delta &= \sin^{-1}(z/r) \\
r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\
\mu_\alpha &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \\
\mu_\delta &= \frac{\dot{z}(x^2 + y^2) - z(x\dot{x} + y\dot{y})}{r^2\sqrt{x^2 + y^2}} \\
\pi &= \frac{\pi_0}{r} \\
V &= (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})/S'\pi_0 r \\
S' &= (86400 \times 36525)/(1.49597870 \times 10^8) = 21.094953
\end{aligned}\right\} \tag{6.82}$$

不同的作者使用了不同的转换方法。从理论上讲，从 FK4 系统到FK5系统的转换，零点改正应在旋转坐标系中进行，转换的历元应采用B1950.0，但在算法上各种转换方法的差异仅表现为一些矩阵次序的交换，而这些矩阵都代表旋转一个微角，因此实用上这些差异在目前精度下均可忽略。

如前所述，从FK4系统到 FK5 系统的转换共包括六个内容，因而在过渡转换的最后结果中还需加上对FK4星的系统改正和个别改正。有人选择1984年初作为转换的历元，主要是考虑世界时的新定义。对1984年初许多FK4星的系统改正和个别改正“FK5－FK4”是显著的，因而对测定世界时的影响不能忽略。因而在从FK4系统到 FK5 系统的转换时，历元的选择不一定也不可能与世界时新定义相符。

第五节 行星视位置的归算

太阳系天体视位置的计算同恒星视位置的计算方法上稍有不同。行星不存在自行，它绕太阳系质心作轨道运动，它的速度不能被认为是常数。

通常已知行星相对于太阳系质心的历表值，需要计算行星在观测历元的视位置。

在图6.3中，设O为太阳系质心，E和P分别为观测历元t时地球和行星的位置，P'为历元$t-\tau$时行星的位置，其中τ为行星的星光射至地球所需的时间，即光行时。

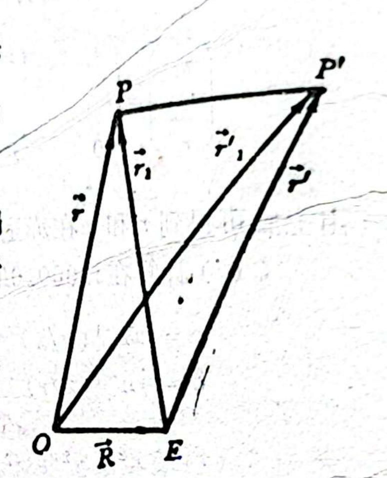


图6.3 行星的视位置

由太阳系质心历表可以查得t时相对于标准历元J2000.0平赤道坐标系的地球的质心位置矢量$\vec{R}(t)$，速度矢量$\dot{\vec{R}}(t)$以及行星的质心位置矢量$\vec{r}(t)$。$\vec{R}$和$\vec{r}$的单位为AU，$\dot{\vec{R}}$的单位为AU/日。

目前太阳系天体的标准历表是美国喷气推进实验室(JPL)编制的DE200历表。天文年历中太阳、月球和行星的位置都是基于这本历表，给出了每天的$\vec{R}$、$\dot{\vec{R}}$和$\vec{r}$的赤道直角坐标的各分量。

利用地球的质心位置矢量$\vec{R}$可求得行星的地心位置矢量，利用地球的质心速度矢量$\dot{\vec{R}}$则可计算光行差改正。

为计算光行时，需要求得行星的地心位置。在t时行星的地心位置矢量r_1为

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{R} \tag{6.83}$$

因此光行时的一阶近似为

$$\tau = |\vec{r}_1|/c \tag{6.84}$$

其中$c = 173.144633$AU/日为光速。

由太阳系质心历表可查得$t-\tau$时行星相对于J2000.0平赤道坐标系的质心位置矢量$\vec{r}_1{}'(t-\tau)$，因而可求得P'的地心位置矢量

$$\vec{r}' = \vec{r}_1{}' - \vec{R} \tag{6.85}$$

然后由下式可计算光行时的更好近似

$$\tau' = |\vec{r}'|/c \tag{6.86}$$

比较τ'和τ，若它们在允许的误差范围内相同，则可继续下面的计算，否则则用τ'值代替τ值，直到光行时数值收敛于允许误差范围内。由于太阳系天体的速度与光速相比很小，因此这个收敛过程很快。允许误差依赖于最后结果的精度和天体在天球上的视角速度。太阳系天体中视角速度较大的天体是月球、水星和太阳。(6.86)式忽略了行星加速项和相对论延迟的项，它们最大时仅为数个10^{-4}秒量级。求得了光行时τ的最后值后，就可得到行星在$t-\tau$时相对于J2000.0平赤道坐标系的质心位置矢量$\vec{r}_1{}'(t-\tau)$和地心位置矢量$\vec{r}'$。

利用(2.100)式可进行光行差改正，得到行星相对于J2000.0时平赤道坐标系的视位置矢量

$$\vec{r}_2 = \vec{r}' + \tau \dot{\vec{R}} \tag{6.87}$$

最后将坐标系进行岁差和章动改正，变换到相对于观测历元t时真赤道坐标系的行星视方向

$$\vec{r}_3 = NP\vec{r}_2 \tag{6.88}$$

其中 P 为岁差矩阵，N 为章动矩阵。天文历表中列出了岁差章动旋转矩阵 $A = NP$，因而（6.88）式可改写成

$$\vec{r}_3 = A\vec{r}_2 \tag{6.89}$$

利用$\vec{r}_3$的赤道直角坐标的三个分量x_3、y_3、z_3，从而得到行星在观测历元 t 时的视赤经和视赤纬

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \tan^{-1}(y_3/x_3) \\ \delta' &= \tan^{-1}(z_3/\sqrt{x_3^2+y_3^2}) \end{aligned}\right\} \tag{6.90}$$

对精度要求较高的行星视位置的计算将在第八章第八节中介绍。

例：求1993年12月18日在地球力学时TDT 0^h时金星的视位置。

计算步骤如下

（1）将地球力学时TDT转换成质心力学时TDB

$$TDB = TDT + 0^s.001658\sin g + 0^s.000014\sin 2g$$

其中g为地球的平近点角

$$g = 357^\circ.53 + 0^\circ.9856003(JD - 2451545.0)$$

将1993年12月18日TDT 0^h对应的儒略日JD = 2449339.5代入，得

$$g = 343^\circ.79, \qquad TDB - TDT = -5.4\times 10^{-9}\text{日}$$

因此本例中的TDB和TDT的差异可忽略。

（2）从天文历表查取在观测历元t时相对于J2000.0平赤道坐标系的地球的质心位置矢量$\vec{R}$，速度矢量$\dot{\vec{R}}$以及行星的质心位置矢量$\vec{r}$

矢量	儒略日（TDB）	直角坐标分量		
		X	Y	Z
$\vec{R}$	2449339.5	+0.067030644	+0.906478450	+0.392963770
$\dot{\vec{R}}$	2449339.5	−0.017454690	+0.000997273	+0.000432345
$\vec{r}$	2449339.5	−0.256620475	−0.618803152	−0.262207072

在JD = 2449339.5时

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{R} = (-0.323651119,\ -1.525281602,\ -0.655170842)$$

$$r_1 = 1.691296202, \qquad \tau = \frac{r_1}{c} = 0^d.00976811$$

从天文历表查取在$t-\tau$时相对于J2000.0平赤道坐标系的行星的质心位置矢量$\vec{r}_1{}'$

矢量	儒略日（TDB）	直角坐标分量		
		X	Y	Z
$\vec{r}$	2449337.5	−0.293728038	−0.605442400	−0.253847446
	2449338.5	−0.275281382	−0.612362252	−0.258128210
	2449339.5	−0.256020475	−0.618803152	−0.262207072
	2449340.5	−0.237759886	−0.624760355	−0.266080972
	2449341.5	−0.218714318	−0.630229486	−0.269747012

利用斯特林（Stirling）内插公式到Δ^4进行内插，得

$$\vec{r}_1{}' = (-0.256803747,\ -0.618742568,\ -0.262168216)$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_1{}' - \vec{R} = (-0.323834391,\ -1.525221018,\ -0.655131986)$$

$$r' = 1.691261590,\qquad \tau' = \frac{r'}{c} = 0^d.00976791$$

重复上面的计算，得

$$\vec{r}_1{}' = (-0.256803740,\ -0.618742570,\ -0.262168216)$$

$$\vec{r}\,' = (-0.323834384,\ -1.525221020,\ -0.655131986)$$

$$r' = 1.691261596,\qquad \tau = 0^d.00976791$$

因此

$$\vec{r}\,' = (-0.323834384,\ -1.525221020,\ -0.655131986)$$

（3）进行光行差改正

$$\tau\dot{\vec{R}} = (0.000170496,\ 0.000009741,\ 0.000004223)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}\,' + \tau\dot{\vec{R}} = (-0.323663888,\ -1.525211279,\ -0.655127763)$$

（4）进行岁差章动改正

由天文历表查得岁差章动旋转矩阵A为

$$A = \begin{pmatrix} +0.99999902 & +0.00128196 & +0.00055716 \\ -0.00128198 & +0.99999918 & +0.00002310 \\ -0.00055713 & -0.00002381 & +0.99999984 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_3 = A\,\vec{r}_2 = (-0.325983841,\ -1.524810231,\ -0.654911020)$$

（5）转换为球面坐标

$$\alpha' = \tan^{-1}(4.677563852) = 17^h11^m43^s.16$$

$$\delta' = \tan^{-1}(-0.420012269) = -22^\circ46'58''.8$$

第六章 习 题

1. 根据某恒星的星表历元t_0的平位置来求它的视位置，要加哪些改正？各项改正的意义是什么？

2. 已知一颗恒星在星表历元t_0时的视位置，要计算它在观测历元t时的视位置，需要进行哪些改正？

3. 已知恒星的赤经和赤纬的周年变化为

$$\frac{d\alpha}{dt}=m+n\sin\alpha\tan\delta+\mu_\alpha$$

$$\frac{d\delta}{dt}=n\cos\alpha+\mu_\delta$$

证明用赤道直角坐标表示周年变化可写为

$$\frac{dx}{dt}=-my-nz+\mu_x$$

$$\frac{dy}{dt}=mx+\mu_y$$

$$\frac{dz}{dt}=nx+\mu_z$$

4. 若忽略日心和太阳系质心间的差异以及光行差E项，证明

$$C^2\sec^2\varepsilon+D^2=K^2$$

其中C和D为贝塞尔日数，K为光行差常数。

5. 当恒星的赤经和赤纬的周年变化仅仅只有自行部分时，证明恒星与黄极间的角距为$\chi\sin\varepsilon/\psi$，其中ψ为黄经日月岁差速率，χ为赤经行星岁差速率。

6. 某颗恒星在标准历元时的赤经为6^h，赤纬为$0°$，周年自行为$6''$，自行的方向位置角为$0°$，不考虑视向速度，证明这时的长期变化为

$$SV_\alpha=100\left(\frac{dm}{dt}+0.4n\sin1''\right)$$

$$SV_\delta=-1500mn\sin1''$$

其中m和n分别以时秒/年和角秒/年为单位。

7. 推导出利用历表计算视位置的二阶项改正公式（6.28）式。

8. 已知某颗恒星在t_0，T_0时的α_0，δ_0，μ_{α_0}，μ_{δ_0}，求在t，T时的α，δ，μ_α，μ_δ，写出计算步骤（不考虑视差和光行差）。

9. 推导出改正光行差E项的赤道球面坐标形式的公式（6.52）式。

10. 证明引力光线偏转对赤经和赤纬的影响可近似写为

$$\Delta\alpha = 0^{s}.136 \times 10^{-8} \sec\delta \cos\delta_{\odot} \sin(\alpha - \alpha_{\odot}) \operatorname{cosec}^{2} \frac{1}{2} D$$

$$\Delta\delta = 2''.04 \times 10^{-8} \left[\sin\delta \cos\delta_{\odot} \cos(\alpha - \alpha_{\odot}) - \sin\delta_{\odot} \cos\delta \right] \operatorname{cosec}^{2} \frac{1}{2} D$$

其中D为天体离太阳的角距。

第七章　相对论初步

第一节　狭义相对论初步

1687年牛顿（I.Newton）出版了《自然哲学的数学原理》，牛顿力学由此诞生。牛顿力学由牛顿运动三大定律，万有引力定律和牛顿的时空观构成。为了和狭义相对论对比，现列出牛顿力学的一些要点：

（1）存在一种特殊的或可称为优越的参考系——惯性系。牛顿运动定律只有在惯性系中才成立。

（2）惯性系和惯性系之间的变换是伽利略变换，即

$$\left.\begin{aligned} t' &= t \\ \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}\,t \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

其中$(t,\ \vec{r})$和$(t',\ \vec{r}')$分别为同一个事件在两个惯性系的时门和空间坐标，而$\vec{v}$是后者相对前者作匀速直线运动时的速度向量。

（3）存在伽利略相对性原理：在所有的惯性系里，具有相同初始条件的同一力学实验的进程都是相同的。也就是说，在惯性系中做任何力学实验都无法测出这一惯性系相对任一给定惯性系的速度。

（4）存在绝对的空间和绝对的时间。牛顿认为，存在与物质及其运动无关的时间和空间。绝对的时间在均匀地流逝，而相对于绝对空间作匀速直线运动的参考系才是惯性系。然而从伽利略相对性原理可以看出，所有的惯性系都是平等的，任何力学实验都无法测出惯性系相对于绝对空间的速度，因而也就无从探知绝对空间的存在。

（5）在一个惯性系里为同时的两个事件，在任何惯性系里都是同时的。

（6）速度的合成遵从平行四边形法则。作相对运动的两个惯性系里的光速不相等。

19世纪末，牛顿力学遇到了挑战。电动力学的麦克斯韦方程在伽利略变换下不能保持形式不变。这意味着可能只有在一个惯性系——绝对空间中，麦克斯韦方程才成立，这样似乎提供了一条用电磁实验找到绝对空间的途径，然而一系列高精度的著名实验证实了这种猜灯的失败。

爱因斯坦(A.Einstein)深信所有的惯性系都是平等的，也深信麦克斯韦方程的正确。他破除了牛顿力学的时空观，在1905年建立了狭义相对论。狭义相对论从两条基本原理出发，建立了全新的理论框架。这两条原理是：

（1）爱因斯坦相对性原理：在所有的惯性系里具有相同初始条件的同一物理实验的进程都是相同的。这就是说，不仅是力学实验，任意的物理实验都不能区分这一或那一惯 性

素，从而全面地否认了绝对空间的存在。

（2）光速不变原理，在所有的惯性系里真空中的光速值都相同，而且在任一给定的惯性系的任何区域和任何方向，真空中的光速值都相等。

光速不变原理显然和伽里略变换相抵触，因为按伽里略变换，惯性系A中的光速等于惯性系B中的光速与B相对A的速度的矢量合成。由此可见，狭义相对论中惯性系之间的变换不是伽里略变换，通常把这一变换称为洛伦兹变换。

首先看看爱因斯坦的两条基本原理怎样革新了经典的时空观。

设观测者A和B在一个给定的惯性架里保持静止并不在同一地点。A持有一个理想的标准钟和和光脉冲发生器，B持有一个反射镜。A处的标准钟给出A处的时间，记为τ。为建立在B处的时间，A在τ_1时向B发射一光脉冲，并于τ_2时记录下脉冲从B返回到A。从光速不变原理，光脉冲往程和返程的时间应当相等。所以很自然地A告诉B，B收到光脉冲的时刻t为

$$t=(\tau_1+\tau_2)/2 \qquad (7.2)$$

用这种方式，在观测者B处建立了时间。类似地，可以把A处的τ推广到整个惯性架而建立了一个时间尺度t。

以上做法的实质是认为B处收到光脉冲这一事件是与A处发生于$(\tau_1+\tau_2)/2$的事件是同时的。这种同时性定义称为爱因斯坦同时性。它的依据是光速不变原理。

从下列几个思维实验可以了解狭义相对论的时空观。所谓思维实验是指用思维逻辑就可以判知结果而无须去实际进行的实验。

实验一　同时性的相对性

在图7.1中设K'系固连在以近于光速的速度v匀速运动的火车车厢上，K系和地面固连。用爱因斯坦同时性在K系和K'系建立各自的时间尺度。在车厢里距前门A和后门B相等距离的中点设置一个光脉冲发生器。规定A门或B门在接受到同一光脉冲时把门打开。显然，对K'系中的观测者，A门和B门的打开是同时的。在K系的观测者看来，光脉冲到达A要比到达B走更长距离，而光的速度无论朝哪个方向都和K'系中的光速相同，因此他将看到B门比A门先打开。这样就得到了一条与牛顿时空观截然不同的结论：在一个惯性系里发生的两个同时的事件，从另一个作相对运动的惯性系来看则不再是同时的。或者说，不同的惯性系有不同的时间尺度。

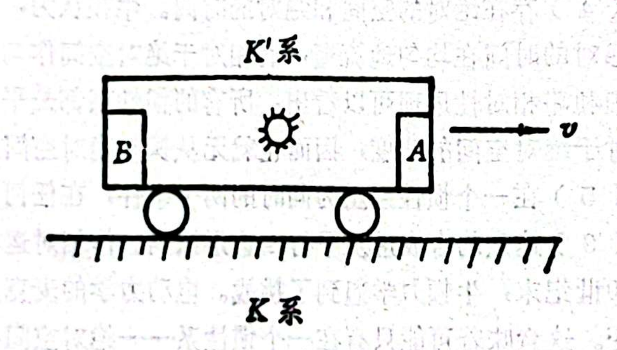
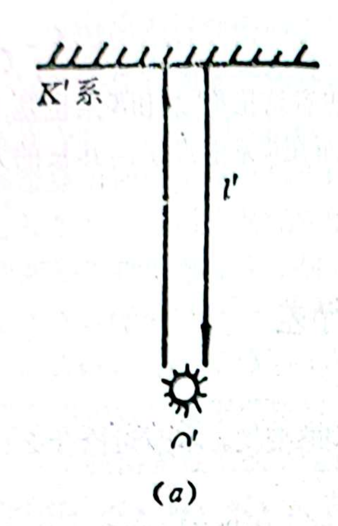


图7.1　同时性的相对性

实验二　时间膨胀

图7.2（a）显示与实验设备固连的惯性系K'中看到的现象。在K'系中静止的光源O'向



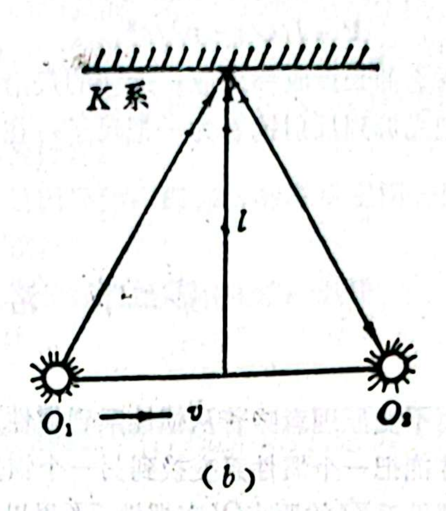


图7.2 时间膨胀

距离为l'的反射镜发射光脉冲，并接收到反射回的信号。设光速为c，在K'系中量到的这一时间间隔为

$$\Delta t' = 2l'/c \tag{7.3}$$

设光源相对固连在地面上的惯性系K以速度v作匀速直线运动，运动方向与K'系中光的传播方向垂直。图7.2（b）显示了K系中的观测。发射和接收时光源不再处于同一地点而分别位于O_1和O_2。记K系中量得的相应时间间隔为Δt，则O_1O_2间的距离为$v\Delta t$。K系中光的传播速度仍是c，立即得到

$$\Delta t = 2\sqrt{l^2 + v^2\Delta t^2/4}/c \tag{7.4}$$

认为$l = l'$，代入（7.3）式，可得

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{7.5}$$

注意对这一实验K'系和K系并不平等。在K'系中发射和接收两事件位于同一地点，其间隔$\Delta t'$可以用K'系中位于O'的一个静止钟来量度；而在K系中，两事件分别发生于O_1和O_2，间隔Δt要用K系中位于O_1和O_2的两个静止钟来量度。这就是著名的运动的钟变慢的现象，也常称为时间膨胀现象。

实验三　长度收缩

实验二中如果实验设备沿光线传播的方向运动，就不能说l'与l相等。在K'系中（7.3）式仍然成立。在K系中光相对观测者的速度仍是c，但反射镜以速度v沿光的传播方向运动，所以K系中的静止观测者看到光子相对反射镜的速度在往程和返程中分别是$c-v$和$c+v$。于是

$$\Delta t = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} \tag{7.6}$$

将上式和（7.3）式代入（7.5）式，有

$$l' = l/\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{7.7}$$

这就是著名的长度收缩效应：运动的尺沿运动的方向变短。注意这里K'系和K系也是不平等的。若把光源到反射镜看为一把尺子，在K'系中尺子静止，而在K系中尺子沿其长的方向运动。

第二节　洛伦兹变换和光行差

光速不变原理意味着从惯性系到惯性系的变换不再是伽利略变换。本节讨论什么样的函数关系才能把一个惯性系变换到另一个惯性系。

设惯性系K'的原点O'在惯性系K里以速度v作匀速直线运动。这样的模型称为洛伦兹推动。选取K的时空坐标系（t，x，y，z）。t是在K系中用第一节讲述的爱因斯坦同时性建立起来的时间尺度，x，y，z是3维空间笛卡儿直角坐标，时间单位和长度单位的选取使光在真空中的速度为c。选取空间坐标轴使O'沿x轴正向运动并保持在X轴上。记(t'，x'，y'，z')为相应的K'系中的时空坐标。在时刻$t=t'=0$，K系和K'系的原点重合，空间坐标轴重合。

在普通物理学中已经证明，同一事件在K系和K'系中的坐标满足下列关系

$$\left.\begin{aligned} t' &= \beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \beta(x-vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

其中

$$\beta = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{7.9}$$

或

$$\left.\begin{aligned} t &= \beta\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right) \\ x &= \beta(x'+vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

显然K系相对K'系的速度为$-v$。（7.8）和（7.10）式称为洛伦兹变换。

洛伦兹变换有以下特点：

（1）它是线性齐次的变换，因而坐标增量的变换与坐标变换相同，即

$$\left.\begin{aligned} \Delta t' &= \beta\left(\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x\right) \\ \Delta x' &= \beta(\Delta x-v\Delta t) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

（2）时间坐标和空间坐标不再是分离而是密切相关的。在一个惯性系里不同地点发生的两个同时事件在另一个惯性系里可以是不同时的。这正是同时性的相对性。不难用(7.11)式再次导出时间膨胀和长度收缩效应。这时要注意在一个参考系里量度尺子的长度时，必须在该参考系里同时地量度尺子两端的坐标然后求出坐标差。

（3）虽然同时性是相对的，但洛伦兹变换满足因果律，即在一参考系里同一地点先后发生的两个事件的顺序在任何参考系里看都不会颠倒。

（4）Δt和$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$不再是洛伦兹变换的不变量，但量

$$\Delta s^2=-c^2(\Delta t)^2+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2 \tag{7.12}$$

的数值在洛伦兹变换下保持不变。

（5）在洛伦兹变换下速度矢量的变换不满足经典的平行四边形法则。记$u'_x=dx'/dt'$，$u_x=dx/dt$，u'_y，u_y，u'_z，u_z定义类似，不难证明

$$\left.\begin{aligned} u'_x&=\frac{u_x-v}{1-vu_x/c^2}\\ u'_y&=\frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vu_x/c^2}\\ u'_z&=\frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vu_x/c^2} \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

（7.13）式在天文上的直接应用是对光行差的讨论。设坐标系的选取使得光线在XY，$X'Y'$平面内传播，引入θ和θ'表示光线在K和K'系中的方向，即

$$\tan\theta=u_y/u_x,\quad \tan\theta'=u'_y/u'_x \tag{7.14}$$

则有

$$\tan\theta'=\frac{\sin\theta\sqrt{1-v^2/c^2}}{\cos\theta-v/c} \tag{7.15}$$

对恒星光行差情况，$v/c\simeq10^{-8}$，忽略这一小量的平方，可得

$$\theta'-\theta=\alpha=\frac{v}{c}\sin\theta \tag{7.16}$$

这正是从牛顿力学里导出的光行差公式（2.92）式。

（7.8）或（7.10）式是洛伦兹变换在特殊的坐标系选择下的形式。实际的天文工作中不可能选择到这样的坐标系。地心绕日运动的速度方向在不断变化，而日心和地心坐标系的坐标轴方向不可能随之变化。因此有必要导出在任意坐标系下的洛伦兹变换的数学表达式。

采用矢量符号。设K'系相对K系的速度矢量为$\vec{v}$，大小为v，一事件在K系和K'系里的时空坐标分别为$(t,\vec{r})$和$(t',\vec{r}')$。令$\vec{r}_{\parallel}$和$\vec{r}_{\perp}$分别表示$\vec{r}$沿$\vec{v}$方向和其垂直方向的分量，即

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{\parallel}&=\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})}{v^2}\vec{v}=\frac{\beta^2(\vec{v}\,\vec{v}^T)\vec{r}}{c^2(\beta^2-1)}\\ \vec{r}_{\perp}&=\vec{r}-\vec{r}_{\parallel} \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

其中$(\vec{r}\cdot\vec{v})$表示$\vec{r}$和$\vec{v}$的内积，$\vec{v}^T$表示列向量$\vec{v}$的转置。

对$\vec{r}'$进行同样的分解。根据前面的讨论，洛伦兹推动只影响沿$\vec{v}$方向的分量，有

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}'_{\parallel}&=\beta(\vec{r}_{\parallel}-\vec{v}\,t)\\ \vec{r}'_{\perp}&=\vec{r}_{\perp}\end{aligned}\right\}\tag{7.18}$$

由此可推得

$$\vec{r}'=\vec{r}+\frac{\beta^2\vec{v}\,\vec{v}^T}{c^2(\beta+1)}\vec{r}-\beta\vec{v}\,t\tag{7.19}$$

时间坐标的洛伦兹变换可用（7.8）式的第一式，其中x应用下式取代

$$r_{\parallel}=\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})}{v}\tag{7.20}$$

于是有

$$t'=\beta\,[t-(\vec{r}\cdot\vec{v})/c^2]\tag{7.21}$$

（7.19）和（7.21）式就是所求的洛伦兹变换的一般形式。

由此可推出在任意坐标系中的光行差表达式。求得的速度变换公式为

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'}=\frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}+\dfrac{\beta^2\vec{v}\vec{v}^T}{c^2(\beta+1)}\dfrac{d\vec{r}}{dt}-\beta\vec{v}}{\beta\,[1-(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{v})/c^2]}\tag{7.22}$$

令

$$\vec{S}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt},\qquad \vec{S}^*=-\frac{1}{c}\frac{d\vec{r}'}{dt'}\tag{7.23}$$

分别表示“静止”观测者和“运动”观测者测得的天体方向的单位向量，即所谓真方向和视方向。用

$$\vec{n}=\vec{v}/v\tag{7.24}$$

表示“运动”观测者的向点方向的单位向量。则有

$$\vec{S}^*=[1+(\vec{S}\cdot\vec{n})\frac{v}{c}]^{-1}[\frac{\vec{S}}{\beta}+\frac{v}{c}\vec{n}+\frac{\beta v^2}{c^2(\beta+1)}(\vec{n}\cdot\vec{S})\vec{n}]\tag{7.25}$$

若取到v/c的一阶项，这正是经典光行差的矢量表达式（2.104）式，即

$$\vec{S}^*-\vec{S}=-\frac{v}{c}\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{n})\tag{7.26}$$

若取到 v/c的二阶项，有

$$\begin{aligned}\vec{S}^*-\vec{S}=&-\frac{v}{c}\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{n})\\&+\frac{v^2}{2c^2}\{[2(\vec{S}\cdot\vec{n})^2-1]\vec{S}-(\vec{S}\cdot\vec{n})\vec{n}\}\end{aligned}\tag{7.27}$$

第三节 黎曼几何和张量分析初步

狭义相对论的物理定律只在惯性系中才成立。爱因斯坦深信，物理定律应当在任何参考系中都成立，从而诞生了广义相对论。在广义相对论里引力造成了时空弯曲，因此不能用欧氏几何而必须用黎曼几何来进行讨论。物理量应当是几何量，与坐标系的选择无关。在选择了坐标系后，物理量可以用其坐标分量来表示。这些坐标分量随着坐标变换按一定的规律而变。这些几何量就是本节要介绍的张量。

设在4维时空里引入一个坐标系，使每一个点亦即每一个事件都能用4个实数（x^0, x^1, x^2, x^3）来表示，简记为x^μ。下面用x^μ和$\widetilde{x}^\mu$代表不同的坐标系。

零阶张量又称为标量，它是4维坐标的一个标量函数即$f(x^\mu)$，它在每一点的数值与坐标系的选择无关，即$f(x^\mu) = f(\widetilde{x}^\mu)$。零阶张量的数值在不同点可以不同，在时空里形成了一个标量场。

一阶张量又称为向量，它有4个坐标分量，可分为两类：逆变向量$U^\mu = (U^0, U^1, U^2, U^3)$和协变向量$V_\mu = (V_0, V_1, V_2, V_3)$。各分量都是坐标的函数，它们随坐标变换而变化的规律分别为

$$\widetilde{U}^\mu = \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\tau} U^\tau \tag{7.28}$$

$$\widetilde{V}_\mu = \frac{\partial x^\tau}{\partial \widetilde{x}^\mu} V_\tau \tag{7.29}$$

微分dx^μ是一个逆变向量。而标量函数$\phi(x^\mu)$的梯度$\partial\phi/\partial x^\mu$是一个协变向量。(7.28)和(7.29)式中采用了爱因斯坦求和法则：某个指标在一项中出现两次表示对该指标从0到3求和，求和号省略。在一项中同一指标不能出现两次以上。这样逆变向量的指标永远标在右上角，协变向量则标在右下角。

只有两个同类型的向量之间才能做加法，其结果是一个新的向量，它的分量等于两向量对应分量之和。例如

$$W^\mu = U^\mu + V^\mu = (U^0 + V^0, U^1 + V^1, U^2 + V^2, U^3 + V^3) \tag{7.30}$$

类似地可定义减法以及向量和数的乘法。

一个逆变向量U^μ和一个协变向量V_μ之间可以定义一种内积运算$U^\mu V_\mu$。不难证明

$$U^\mu V_\mu = \widetilde{U}^\lambda \widetilde{V}_\lambda \tag{7.31}$$

即内积的结果是一个零阶张量。

在时空里向量U^μ或V_μ组成了向量场，它有点类似经典力学里的速度场。要注意并不是每一个有4个分量的量都可以称为是一阶张量。如$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$就不是，它的变换可能是非线性的。从（7.28）和（7.29）式可见，向量的分量在坐标系变换下的变换是线性齐次的，其系数依赖于时空中的点。由此也可得出一个重要结论：一个张量的所有分量若在一个坐标系中全为零，则在任何坐标系中都为零。

一个二阶张量共有$4^2 = 16$个坐标分量。它有三种类型：逆变、协变和混合张量。在坐标系

变换下，它们的分量分别按下面的规则而变：

$$\widetilde{W}^{\mu\nu}=\frac{\partial\widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\widetilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta}}W^{\alpha\beta} \tag{7.32}$$

$$\widetilde{W}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\widetilde{x}^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial\widetilde{x}^{\nu}}W_{\alpha\beta} \tag{7.33}$$

$$\widetilde{W}^{\mu}_{\nu}=\frac{\partial\widetilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial\widetilde{x}^{\nu}}W^{\alpha}_{\beta} \tag{7.34}$$

仍然规定逆变指标写在右上角，协变指标写在右下角。这样，上面三个式子依次给出了二阶逆变，协变和混合张量的变换规律。

和一阶张量的情况一样，同样可以定义同阶同类型张量之间的加减法以及数和张量的乘法。

定义克罗内克（Kronecker）δ函数

$$\delta^{\mu}_{\nu}=\begin{cases}1 & \mu=\nu\\ 0 & \mu\neq\nu\end{cases} \tag{7.35}$$

容易证明它是一个二阶混合张量。二阶张量也可以由两个一阶张量的张量积构成。张量U^{μ}和V_{ν}的张量积定义为

$$U^{\mu}\otimes V_{\nu}=U^{\mu}V_{\nu} \tag{7.36}$$

容易证明其结果是1个二阶混合张量。同样可以建立逆变向量与逆变向量、协变向量与协变向量之间的张量积。张量积算符⊗通常被省略。

二阶张量之间以及不同阶的张量之间都可进行张量积，从而产生更高阶的张量。这里将不讨论三阶或三阶以上的张量。前面定义过的向量之间的内积则正好相反，它把张量的阶数降低。此外，不是任何两个向量之间都可以进行内积，它必须涉及到一个逆变下标和一个协变下标。内积运算可以推广到二阶张量。例如，张量$U^{\mu\nu}$和$V_{\mu\nu}$的内积为

$$W^{\mu}_{\nu}=U^{\mu\alpha}V_{\alpha\nu} \tag{7.37}$$

容易证明，所得结果是一个二阶混合张量。注意$U^{\mu\alpha}V_{\alpha\nu}$和$U^{\mu\alpha}V_{\nu\alpha}$是就不同指标对进行的内积，通常可能得到不同张量。再如张量$U_{\mu\nu}$和V^{ν}的内积为

$$W_{\mu}=U_{\mu\nu}V^{\nu} \tag{7.38}$$

其结果是一个一阶协变张量。类似的例子不再一一枚举。一个特殊情况是二阶混合张量U^{μ}_{ν}对自己的逆变和协变指标进行的"内积"：

$$U=U^{\mu}_{\mu} \tag{7.39}$$

其结果是一个标量，阶减小了2。这样的运算称为缩并。如果把U^{μ}_{ν}的各分量排列组成一个4×4矩阵，缩并的结果正是该矩阵的迹。

上面引进了4维时空中的标量和张量场及其运算，但并没有说明如何进行量度。例如，怎样来定义向量的长度，向量之间的夹角等。为此，需要引入最重要的一个张量——度规张量。

在3维欧氏空间里，若选用直角坐标(x, y, z)，则两个邻近点之间的距离dS可表示为

$$dS^2=dx^2+dy^2+dz^2 \tag{7.40}$$

若采用球坐标(r, θ, ϕ)，则有

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{7.41}$$

注意上面两式的右边虽然有不同的表达式，但它的左边为两点间距离的平方，这是一个几何量，与坐标系选择无关。

众所周知，3 维欧氏空间是平直，处处均匀和各向同性的，这些性质完全由（7.40）式所决定。（7.41）式也代表欧氏空间，只要经过从球坐标到直角坐标的变换，（7.41）式就变成（7.40）式。然而 2 维空间线元

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \tag{7.42}$$

和

$$dS^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{7.43}$$

却代表了不同的空间。前者表示 2 维欧氏空间，后者表示 3 维欧氏空间中的半径为 1 的 2 维球面。不可能找到连续可微的，一一对应的坐标变换使两者相互转换。这说明线元 dS^2 的表达式的重要性。这样的表达式称为度规。

广义相对论里的 4 维时空是一个广义黎曼空间，其度规可写为

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{7.44}$$

其中$g_{\mu\gamma} = g_{\nu\mu}$具有对称性。由于$dS^2$是标量，$dx^\mu$是一阶逆变张量，显然$g_{\mu\nu}$是一个对称的二阶协变张量，称为度规张量。很容易把（7.40）—（7.43）式写成（7.44）式的形式，可以看出这些二次型都是正定的。广义黎曼空间的度规张量不再具有正定的性质，亦即dS^2可能小于或等于零。

度规张量$g_{\mu\nu}$的所有坐标分量组成一个 4×4 对称矩阵，它的逆矩阵对应一个二阶逆变张量$g^{\mu\nu}$。按定义应有

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \tag{7.45}$$

利用度规张量可建立起逆变向量和协变向量间的一一对应。记与U^μ对应的向量为U_μ，其对应关系为

$$U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu \tag{7.46}$$

两边乘以$g^{\alpha\mu}$，立即得

$$U^\mu = g^{\mu\nu} U_\nu \tag{7.47}$$

这样的记法可看为利用$g_{\mu\nu}$或$g^{\mu\nu}$实现张量的另一种运算，即指标的升降。对二阶张量同样可以实行指标的升降。例如

$$U_\nu^\mu = g_{\nu\alpha} U^{\alpha\mu} \tag{7.48}$$

于是，不难从（7.45）式看出

$$g_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu \tag{7.49}$$

黎曼空间里一个向量U^μ的长度$|U|$可以定义为

$$|U|^2 = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu = U^\mu U_\mu \tag{7.50}$$

注意因为$g_{\mu\nu}$一般不是正定的，$|U|^2$可以大于、小于或等于零。同样可以定义两个向量U^μ和V^μ的黎曼内积(U, V)为

$$(U, V) = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu = U^\mu V_\mu \tag{7.51}$$

若这一内积等于零，则称U^μ和V^μ黎曼正交，或简称为正交。

一般情况下，度规张量$g_{\mu\nu}$不是常数，而是时空点x^α的函数。$g_{\mu\nu}(x^\alpha)$是时空上的一个

二阶协变张量场。由于对称性，它共有10个独立的分量。

狭义相对论的平直时空在惯性笛卡儿坐标系里的度规如（7.12）式所示，即

$$dS^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2 \tag{7.52}$$

若$dS^2<0$，由上式可见构成4维时空间隔dS的两点之间可以用一条速度小于c的路径联系起来，这时两点的间隔称为类时间隔。若$dS^2=0$，则两点之间可用速度等于c的光信号相连结，称为类光间隔或零间隔。若$dS^2>0$，则该两点间不可能用任何信息传输的方式相连结，它们之间没有因果关系，称为类空间隔。在广义相对论里，将继续沿用这样的分类和术语。（7.52）式称为闵可夫斯基度规。

狭义相对论里的闵可夫斯基度规$\eta_{\mu\nu}$对应时空的平直性也可用下列方式来说明。设E_1和E_2是两个事件，亦即时空中的两个点。并设E_1和E_2之间的间隔为类时间隔。可以用无穷多条路径连结E_1和E_2，其中4维长度取极值的路径称为测地线。如果测地线是直线，则认为时空是平直的。

引入$d\bar{S}^2=-dS^2$，类时间隔$d\bar{S}$是正实数。沿一给定的路径$\int_{E_1}^{E_2}dS$表示该路径的4维长度，它的变分为零正是测地线应当满足的条件。记拉格朗日函数

$$L=-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

$$=c^2\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2-\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2-\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2-\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 \tag{7.53}$$

其中λ为一待选参数，则

$$\delta\int_{E_1}^{E_2}d\bar{S}=\delta\int_{E_1}^{E_2}\sqrt{L}\,d\lambda=0 \tag{7.54}$$

为测地线应当满足的条件。若选取λ与测地线的弧长$\bar{S}$成常数比例，从（7.52）式可见，L的值守恒，（7.54）式等价于

$$\delta\int_{E_1}^{E_2}L\,d\lambda=0 \tag{7.55}$$

按变分法原理，测地线应当满足下面的欧拉一拉格朗日方程

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=0 \tag{7.56}$$

其中$\dot{x}^\mu=dx^\mu/d\lambda$，$\lambda$与弧长成比例，它称为仿射参数。将（7.53）式代入上式，得

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2}=\frac{d^2x}{d\lambda^2}=\frac{d^2y}{d\lambda^2}=\frac{d^2z}{d\lambda^2}=0 \tag{7.57}$$

其解正是直线。

上面对闵可夫斯基平直性的论述并不是很严密的。在黎曼几何中可以计算出它的曲率张量为零而得出平直性，但这种计算超出了本书的范围。然而上面的论证却给出了测地线方程（7.56）式。在广义相对论里，对测地线的讨论完全可以类似地进行，同样可得到（7.56）式，只是这时

$$L=g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \tag{7.58}$$

将上式代入（7.56）式得测地线方程为

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}=0 \tag{7.59}$$

上面的E_1、E_2之间的间隔是类时间隔，连结它们的测地线称为类时测地线。天文工作中常常要讨论类光间隔的情况，这时的测地线称为类光测地线或零测地线。对于零测地线，$dS^2=0$，上面的论证过程就不再成立。在黎曼几何中可以证明，只要适当选取参数λ，零测地线满足的微分方程形式仍如（7.56）和(7.59)式所示。这样的λ仍称为仿射参数，只是它失去了与4维弧长成比例的性质。

第四节　广义相对论初步

狭义相对论的定律在惯性参考系中才成立，因而惯性系在狭义相对论中就和在牛顿力学中一样有一个特殊优越的地位。物理定律是一些物理量之间的关系，成立与否应当和坐标系的选择无关，不应当局限在惯性系内才成立。坐标系的变换只造成物理量的坐标分量按一定的规律而变换，从而使物理定律的数学表达式有所变化。此外，在自然界并不能实现真正的惯性系。由于万有引力的存在，只要有物质就会有加速度。以上所述都是狭义相对论理论的巨大缺陷。

经过十年左右的努力，爱因斯坦于1916年建立了广义相对论。在广义相对论里，惯性系丧失了其特殊地位。整个时空里不存在全局的惯性系，只在每一个时空点的无穷小邻域内存在局部惯性系。引力造成了时空的弯曲，弯曲的时空不能用（7.52）式中闵可夫斯基度规张量$\eta_{\mu\nu}$来表示，而要用某个对称的黎曼度规张量$g_{\mu\nu}$来表示，如（7.44）式所示。$g_{\mu\nu}$决定了时空的全部性质，它由物质和能量的分布和状态来决定。物理定律表现为张量之间的关系，在选定坐标系后，就可用张量的坐标分量来写出该定律的数学表达式，就这一意义而言，所有坐标系是平等的。本节仅介绍广义相对论的基本思想，为以下章节的学习奠定基础。

首先回顾一下爱因斯坦给出的旋转圆盘的实例。设时空为平直的，取惯性系K，度规应当是闵可夫斯基度规（7.52）式。若选用柱坐标（t，r，φ，Z），则度规可写成

$$dS^2=-c^2dt^2+dr^2+r^2d\varphi^2+dZ^2 \tag{7.60}$$

设在$Z=0$的平面上有一圆盘绕Z轴相对K系以不变角速度ω旋转。与圆盘固连的参考系为K'系，它也采用柱坐标，则从K系到K'系的坐标变换为

$$t=t',\ r=r',\ \varphi=\varphi'+\omega t',\ Z=Z' \tag{7.61}$$

dS^2是坐标变换的不变量，于是在K'系中的度规为

$$dS^2=-(1-\omega^2r'^2/c^2)(cdt')^2+(dr')^2+(rd\varphi')^2+(dz')^2+2\omega r'^2d\varphi dt' \tag{7.62}$$

现在来看K'系里的3维空间几何，例如看圆周率是不是还等于π。把一根标准尺先沿圆盘的径向放置，再沿半径为r'的圆的圆周放置并跟随圆盘转动。从惯性参考系K系的观测者来看，沿径向放置时尺子无洛伦兹收缩，而沿圆周放置时因存在速度$\omega r'$而有收缩。设尺子相对K系为静止时长度为1，量得上述圆周半径长度为r'，则由上面分析，用该尺量得圆周的长度一定大于$2\pi r'$。从长度收缩公式(7.7)式，不难得出圆周长为$2\pi r'/(1-\omega^2r'^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$，即圆周率

大于π且与圆周半径有关。

对于K系的观测者，他观察到了上述现象，并把它解释为一种运动学效应。对于K'系的观测者，他应该看到同样的现象，并认为周围的3维空间里的几何不是欧氏几何，空间弯曲了。如果没有K系作参照，他并不知道自己所在的圆盘在相对惯性系旋转，因而无法用运动学效应来解释。他会认为这是一种动力学效应，空间的弯曲是K'系里的离心力场所造成。

注意，K系和K'系里的4维时空是相同的，都是平直的。然而K系和K'系中的观测者看到的3维空间却是不同的，这种空间的弯曲依赖于参考系的选择，而不是实质性的。实际上，K'系里的离心力场正是因选择了旋转参考系而产生的惯性离心力。旋转圆盘的例子给我们的启示是：惯性力场可以产生空间弯曲。

以上的讨论并没有考虑圆盘质量形成的引力场。现在来考虑引力场的时空效应。先讨论均匀引力场情况。设在参考系K里观察到均匀的重力场，用一个常数重力加速度$\vec{g}$来表征。设一物体受重力的作用产生的加速度为$\vec{a}$，按照牛顿力学有

$$m_I\vec{a}=m_F\vec{g} \tag{7.63}$$

m_I和m_F分别是物体的惯性质量和引力质量。前者表示物体的惯性，后者相当于物体携带的产生引力的物质数量。如果对各种不同材料构成的物体，m_I/m_F是一个固定的常数，则可选择适当的单位，使

$$m_I=m_F \tag{7.64}$$

从而$\vec{a}=\vec{g}$，造成不同材料的物体在$\vec{g}$场同一地点同时开始下堕后，始终保持在一起而不会分开。最早用实验证明引力质量和惯性质量相等的是伽利略（G·Galileo）。到1889年著名的Eötvös扭秤实验已把实验精度提高到10^{-9}，现在的精度已达10^{-11}—10^{-12}。（7.64）式常被称为弱等效原理。

设K'系相对K系在$\vec{g}$场中自由下堕。例如K'系固连在一个因钢索断开而自由下落的电梯上。从K系看，K'系是以$\vec{g}$为加速度的一个加速参考系，其中有惯性力场$-m_I\vec{g}$，它与重力场$m_F\vec{g}$抵消。这样，处于密封电梯里的观测者并不能区分自己是处于一个无引力场的惯性系里，还是处于一个在均匀引力场里作自由下落的加速参考系中。造成这种状况的是弱等效原理，它使均匀引力场和惯性力场等效。

这样，K系里有引力场，它等价于惯性力场。如旋转圆盘例子所示，可以设想K系中的3维空间有所弯曲。然而等效原理使得可以找到在引力场中自由下落的K'系，它是一个惯性系，空间是平直的。注意K系和K'系有着同一平直的4维时空。

如果K系中有非均匀引力场，就不可能找到一个K'系，使引力场完全被惯性力场所抵消。这时不存在全局的惯性系，或者说4维时空是弯曲的。但在每一时空点的充分小的邻域内，可以选择到一个在作自由下落的局部惯性系，在那里力学定律与没有引力场和未被加速的坐标系里相同。弱等效原理只能得出力学定律相同。爱因斯坦推广了这一原理，他假定在局部惯性系内一切物理定律都是狭义相对论的定律。这就是爱因斯坦等效原理。

用几何的语言来叙述：引力使4维时空弯曲，时空几何用（7.44）式所示的度规张量$g_{\mu\nu}$来描述，对于非均匀的引力场，一般不可能找到一种坐标变换，使$g_{\mu\nu}$变成平直时空的闵可夫斯基度规$\eta_{\mu\nu}$，但在任一时空点邻近，一定可以找到一个坐标变换，使$g_{\mu\nu}$在该点变为$\eta_{\mu\nu}$，且在该点无引力存在，在其邻近引力表现为潮汐力的形式。可以设想在地面附近空间作自由

下落电梯，电梯内的观测者(假设他的大小是一个几何上的点)并不感觉到地球引力的存在。但他观察邻近物体的运动状态时，就会发现它们的路径并不相互平行，表现了潮汐力场的存在。

既然有引力场时一般没有全局惯性系存在，物理定律的阐述就不能限于惯性系。如前所述，物理定律的实质应当与参考系的选择无关。物理量对应于几何量——张量。物理定律应当是一些张量之间服从的关系，其数学表达式随坐标变换按张量坐标变换的规律而变。等效原理宣告了局部惯性系的存在，而在局部惯性系里狭义相对论的定律是成立的，因而若把一条狭义相对论的物理定律写成张量之间的关系，则它在任意参考系中也应当成立。特别是，不受力的粒子在惯性系中沿直线运动，在广义相对论的弯曲时空中它应沿测地线运动，其运动方程如（7.59）式所示。光子沿零测地线运动，试验体沿类时测地线运动。这里用试验体表示几何上可看为一点，其质量对周围引力场的贡献可以忽略的物体。

在不破坏因果律的前提下，广义相对论允许采用任意坐标系$x^\mu=(t,\ x^i)$，这里$t=x^0$表示时间坐标，常称为坐标时，$x^i=(x^1,\ x^2,\ x^3)$表示空间坐标。它们一般没有清晰的物理意义，也很难说出明确的几何意义。x^μ看成是给4维时空一个数字标记，从而与4维实数空间构成一一对应。和在牛顿力学与狭义相对论的情况不同，时间坐标和空间坐标都不能用标准钟和标准尺来进行度量。坐标时t并不一定就是第一节中所讲的用爱因斯坦同时性建立起来的时间，因而不能直接用时钟来度量。一个标准钟所指示的时间称为该钟的原时，常用希腊字母τ来标记。标准钟在4维时空的轨迹称为钟的世界线。间隔$d\tau$和世界线上线元的关系为

$$dS^2=-c^2d\tau^2 \tag{7.65}$$

原时间隔$d\tau$是一个坐标变换的不变量，也就是一个标量，它是可以直接测量的。第八章第六节里将进一步讨论坐标时和原时的概念。

第五节　施瓦西度规

天文上最简单的模型是一个质量为M的具有球对称的静止（不自转）天体，讨论它产生的引力场，或等价地说研究它周围时空的几何是很有意义的。这就是所谓静态的一体问题。爱因斯坦发表广义相对论不久，施瓦西（K.Schwarzschild）解决了这个问题，他得出这一时空的几何可准确地用下面的度规表示

$$dS^2=-\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2+\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{7.66}$$

其中

$$m=\frac{GM}{c^2} \tag{7.67}$$

m的2倍称为天体的引力半径，G是万有引力常数。

（7.66）式称为施瓦西度规，空间坐标（r，θ，φ）称为施瓦西标准坐标，简称标准坐标。当$m=0$即无引力场存在时，它就是球坐标。显然，当r趋于无穷，即离引力源十分远时施瓦西度规趋于闵可夫斯基度规，时空趋于平直。此外，度规张量和牛顿引力势GM/r有关。

$g_{\mu\nu}$取代了牛顿力学中引力势的地位。

对于太阳，$m=1.5$公里，在地球轨道处引起的广义相对论效应约为10^{-8}，在水星处约为2.5×10^{-8}。对于地球，$m=0.4\times10^{-5}$公里、在地面处引起的广义相对论效应约为0.7×10^{-9}。对脉冲双星PSR1913+16，可估算出广义相对论效应约为3×10^{-7}。

标准坐标在解算试验体的运动方程时有其方便之处，但在讨论光的传播时引入各向同性坐标(t, r', θ, ϕ)则更为方便。两者间的关系为

$$r=r'\left(1+\frac{1}{2}\frac{m}{r'}\right)^2 \tag{7.68}$$

由(7.66)和(7.68)式得

$$dS^2=-\frac{\left(1-\frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2}c^2dt^2+\left(1+\frac{m}{2r}\right)^4(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2) \tag{7.69}$$

其中r'已重记为r。这就是用各向同性坐标表示的施瓦西度规。若实行下述变换

$$\left.\begin{aligned}x&=r\sin\theta\cos\phi\\y&=r\sin\theta\sin\phi\\z&=r\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{7.70}$$

则有

$$dS^2=-\frac{\left(1-\frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2}c^2dt^2+\left(1+\frac{m}{2r}\right)^4(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{7.71}$$

其中

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{7.72}$$

这是用准笛卡儿坐标表示的各向同性度规。容易看出在空间任何一点，光沿各个方向的坐标速度都相同。

对于太阳系天体的低速弱引力场的情况，度规里有两个小参数：m/r和v^2/c^2。其中v是天体的坐标速度，有

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{7.73}$$

这两个小参数可看为是相同量级。在讨论太阳系天体的运动时，若保留这些小量的一次幂，则得到度规(7.71)式的牛顿近似

$$dS^2=-\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2+(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{7.74}$$

若准到二次幂，则得到度规的后牛顿近似

$$dS^2=-\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{2m^2}{r^2}\right)c^2dt^2+\left(1+\frac{2m}{r}\right)(dx^2+dx^2+dz^2) \tag{7.75}$$

研究光线传播时，光子的坐标速度v近于c，v^2/c^2不能再看为是小量，于是只剩下一个小参数m/r。准到它的零次幂，得度规的牛顿近似为

$$dS^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{7.76}$$

这正是闵可夫斯基度规，其中的零测地线为直线。准到m/r的一次幂，得后牛顿近似为

$$dS^2 = -(1-\frac{2m}{r})c^2dt^2 + (1+\frac{2m}{r})(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{7.77}$$

天文资料处理工作中大量涉及到光线的传播。下面从（7.77）式出发导出后牛顿近似下在各向同性坐标系里的零测地线方程。

利用（7.70）式可将（7.77）式变换成

$$dS^2 = -(1-\frac{2m}{r})c^2dt^2 + (1+\frac{2m}{r})(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2) \tag{7.78}$$

设λ为仿射参数，由（7.58）式可建立拉格朗日函数

$$L = -(1-\frac{2m}{r})c^2\dot{t}^2 + (1+\frac{2m}{r})(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) \tag{7.79}$$

注意上式中的导数是对λ求导。由于L不含变量t和ϕ，因此立即可得欧拉-拉格朗日方程（7.56）式的二个积分

$$(1-\frac{2m}{r})\dot{t} = k \tag{7.80}$$

$$(1+\frac{2m}{r})r^2\sin^2\theta\dot{\phi} = h \tag{7.81}$$

k和h为积分常数。由（7.56）式还可得

$$\frac{d}{d\lambda}[(1+\frac{2m}{r})r^2\dot{\theta}] - (1+\frac{2m}{r})r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0 \tag{7.82}$$

最后一个方程比较复杂，但对光线有$dS^2=0$，所以可用$L=0$来取代。

（7.82）式有特解$\theta=\pi/2$，由于Z轴取向的任意性，这实际上表明光线始终保持在一个“平面”上。选XY“平面”为光线所在的“平面”，则$L=0$可写成

$$(1-\frac{2m}{r})c^2\dot{t}^2 - (1+\frac{2m}{r})(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) = 0 \tag{7.83}$$

由于仿射参数作比例因子变换后仍是仿射参数，故可选择λ使积分常数$k=1$，并令$h=cq$。将积分（7.80）和（7.81）式代入（7.83）式，有

$$(1+\frac{2m}{r}) - (1-\frac{2m}{r})\frac{q^2}{r^2} - \frac{1}{c^2}(1+\frac{2m}{r})\dot{r}^2 = 0 \tag{7.84}$$

与求解经典开普勒问题的做法一样，引入ϕ为自变量，并令$u=1/r$，有

$$1 + 4mu - q^2u^2 - q^2(\frac{du}{d\varphi})^2 = 0 \tag{7.85}$$

为便于求解，对ϕ中再微商一次，得

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{2m}{q^2} \tag{7.86}$$

上式的通解为

$$u=c_1\cos\phi+c_2\sin\phi+2m/q^2 \tag{7.87}$$

用直角坐标表示，有

$$c_1x+c_2y+\frac{2m}{q^2}r=1 \tag{7.88}$$

首先选择X轴的方向使光线路径相对Y轴对称，这意味着$c_1=0$。由（7.81）式可见，当$m=0$时有$r^2\dot{\phi}=cq$，这时仿射参数为t，光速为c，因此光线离原点的距离为q，由此得到$c_2=1/q$。故各向同性坐标系里施瓦西场中的后牛顿近似下的零测地线方程 为

$$y=q-\frac{2mr}{q} \tag{7.89}$$

应当记住这里对坐标系进行了特殊的选取，即光线在XY坐标面上，并相对 Y 轴为对称 。常数q的几何意义为：光线到原点的最短距离为$q-2m$。

（7.83）式可写成

$$(1-\frac{2m}{r})c^2\dot{t}^2-(1+\frac{2m}{r})(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=0 \tag{7.90}$$

利用（7.80）式并取$k=1$，可得下述估计

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=c^2+O(c^{-2}) \tag{7.91}$$

由（7.89）式可估计出$\dot{y}^2=O(c^{-2})$，于是有

$$\dot{x}^2=c^2+O(c^{-2}) \tag{7.92}$$

即$\pm x/c$可看为是仿射参数。选择光源在X轴的正向，光线基本上沿X轴负方向传播，则$-x/c$就是仿射参数。

零测地线的切矢量可用 4 维速度来表示，即

$$U^\mu=\left(\frac{dt}{d\lambda},\ \frac{dx}{d\lambda},\ \frac{dy}{d\lambda},\ \frac{dz}{d\lambda}\right) \tag{7.93}$$

采用上面选择的坐标系和仿射参数，上式成为

$$U^\mu=\left(-c\frac{dt}{dx},\ -c,\ -c\frac{dy}{dx},\ 0\right) \tag{7.94}$$

利用（7.80）和（7.89）式，到后牛顿近似，得

$$U^\mu=\left(1+\frac{2m}{r},\ -c,\ \frac{2mcx}{rq},\ 0\right) \tag{7.95}$$

对光子$dS^2=0$，应有

$$|U^\mu|^2=g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \tag{7.96}$$

利用（7.77）和（7.95）式不难证明上式在后牛顿近似精度下成立。

第六节　自然基和本征基

空间的弯曲产生了许多奇异的现象。例如，即使没有光行差和大气折射，也没有理由说观测到的光源方向就是光线在光源处的出射方向。广义相对论彻底改变了传统的测量理论，因此必须把天文观测和天文处理的理论方法纳入广义相对论的框架。这里主要讨论的是方位观测。

一个观测者并不能直接观测到远处发生的事件。他不能亲临其境去观测太阳的爆发，他得知这一事件是因为观测到另一事件，即太阳爆发产生的光子到达观测者所在地。也就是说观测总是两个事件在时间和地点上的重合。对天文观测来说，一次观测是两条世界线的交点。一条是光子的零测地线，另一条是观测者的世界线。

为讨论天文观测，需要引入瞬时观测者的概念。它是观测者在观测瞬间的4维时空坐标 x^μ 和4维速度 $U^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$ 的总和，其中 τ 是观测者的原时，即观测者携带的并与他保持相对静止的钟所指示的时间。由（7.44）和（7.65）式可得

$$\|U^\mu\|^2 = g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = -c^2 \tag{7.97}$$

因此可引入4维速度方向的单位向量 $q^\mu = U^\mu/c$，它是一个长度为1的类时向量。这里将用（x^μ，q^μ）表示一个瞬时观测者，它共有7个独立的分量。对于每一个观测到的天文事件，都应当了解是哪个瞬时观测者观测的，这样才能正确地处理资料。

施瓦西场中零测地线的切矢量 U^μ 如（7.95）式所示，由于坐标系选取的任意性，没有任何理由说(7.95)式中的（U^1，U^2，U^3）就是观测者观测到的光线方向。显然，不同的坐标系选择会得到不同的时空分离。实际上，一个瞬时观测者（x^μ，q^μ）对其邻近的时空有一个自然的时间空间分离。他的时间就是他随身携带并与他始终保持相对静止的理想钟所指示的时间，即他的原时 τ。实际上，如第七章第四节里所述，$\mathrm{d}\tau$ 就是他的世界线的线元，而 q^μ 正是世界线上指向 τ 增加方向的一个单位切矢量。将（x^μ，q^μ）周围无限小的4维时空近似地看作是平直的，q^μ 看成是时间轴，则与 q^μ 黎曼正交的所有向量的全体是一个3维空间，它正是该瞬时观测者认为的空间，称为观测者的局部静止空间。光的4维方向 U^μ 在该空间的投影 e^μ 正是观测到的光的空间方向。它只和光的方向以及观测者有关，而和坐标系选取无关。

将 U^μ 作以下分解

$$U^\mu = \alpha q^\mu + \beta e^\mu \tag{7.98}$$

其中 α，β 为常数，并规定 e^μ 是一个单位向量。利用 $U^\mu U_\mu = 0$，$e^\mu q_\mu = 0$，$q^\mu q_\mu = -1$，$e^\mu e_\mu = 1$，易求得 α 和 β，于是得到光的3维空间方向

$$e^\mu = \frac{U^\mu + (U,\ q)q^\mu}{(U,\ q)} \tag{7.99}$$

其中 $(U,\ q)$ 表示2个向量的内积，如（7.51）式定义。瞬时观测者（x^μ，q^μ）观测到的二条光线的空间方向 $e^\mu_{(1)}$ 和 $e^\nu_{(2)}$ 之间的夹角 θ 定义为

$$\cos\theta = g_{\mu\nu} c^{\mu}_{(1)} c^{\nu}_{(2)} \tag{7.100}$$

这个角度仅和观测者有关而和坐标系的选取无关，它是一个可观测量。

现在可以在瞬时观测者邻近的的时空里建立局部坐标架。正如光滑曲面上一点的邻域可以用过该点的曲面的切平面来近似一样，观测者邻近的4维时空也可用一个平直的4维空间来近似，称为切空间。可以选4个互相正交且长度为1的向量做基底，构成一个局部坐标架，称为四元基。由于所讨论时空的性质，这4个向量中必有一个具有类时的性质，其长度平方为−1，而其它3个为类空的，长度平方为1。对于瞬时观测者（x^{μ}，q^{μ}），显然选q^{μ}为类时基底，问题是另外3个类空基底应该如何选取。

天文工作中经常遇到二种瞬时观测者："静止"的和"运动"的观测者。现就地球围绕太阳的运动说明如下。设选定日心时空坐标系（t，x^i），实际的地球在该坐标系中是运动的，记在观测瞬间地心的时空坐标为x^{μ}_E，它的4维速度方向的单位向量为q^{μ}_E，则在该瞬间"运动"的观测者（即实际的观测者）为（x^{μ}_E，q^{μ}_E）。在该瞬间还可以假想一个"静止"的观测者，他于这一瞬间在坐标系中的3维坐标速度为零。注意3维坐标速度为零不等于4维速度为零，在4维坐标系里，"静止"只表明他的世界线沿着x^i_E保持不变而t增加的方向进行。记这一方向的单位向量为Q^{μ}_E，则"静止"的观测者用（x^{μ}_E，Q^{μ}_E）表示。显然，这两个观测者观测到的光线空间方向之差正是光行差。

以"静止"瞬时观测者为原点的四元基称为自然基；以"运动"瞬时观测者为原点的四元基称为本征基。它们观测到的光线方向分别称为自然方向和本征方向。两者之差就是原点有一个相对的速度，两者之间的变换是一个洛伦兹变换。

下面从度规（7.71）式出发建立施瓦西场在各向同性坐标系里的自然基和本征基。在给定的时空点（t，x，y，z），显然逆变向量（1，0，0，0），（0，1，0，0），（0，0，1，0）和（0，0，0，1）是线性独立的。用度规（7.71）式可以证明，第一个是类时向量，后3个是类空向量，而且它们相互两两正交，但他们不是单位向量。下面4个逆变向量是两两正交的单位向量

$$\left.\begin{aligned}
Q^{\mu} &= \left(\frac{1+\frac{m}{2r}}{c\left(1-\frac{m}{2r}\right)},\ 0,\ 0,\ 0\right) \\
I^{\mu} &= \left(0,\ \left(1+\frac{m}{2r}\right)^{-2},\ 0,\ 0\right) \\
J^{\mu} &= \left(0,\ 0,\ \left(1+\frac{m}{2r}\right)^{-2},\ 0\right) \\
K^{\mu} &= \left(0,\ 0,\ 0,\ \left(1+\frac{m}{2r}\right)^{-2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{7.101}$$

它们正是自然基的基底。

自然基（7.101）式也可以用另一种方式导出。在给定时空点（t，x^i）的无穷小邻域，（dt，dx^i）可看成是局部坐标，若实行下述的局部坐标变换

$$\left.\begin{aligned}
d\widetilde{t} &= \frac{1-\dfrac{m}{2r}}{1+\dfrac{m}{2r}}dt \\
d\widetilde{x}^i &= \left(1+\frac{m}{2r}\right)^2 dx^i
\end{aligned}\right\} \tag{7.102}$$

则可把施瓦西度规（7.71）变换成在给定点取闵可夫斯基形式的度规，即

$$dS^2 = -c^2 d\widetilde{t}^2 + d\widetilde{x}^i d\widetilde{x}^i \tag{7.103}$$

上式在（t，x^i）成立。当然，并不存在全局的坐标变换把（7.71）式变成闵可夫斯基度规。对（7.103）式，容易证明（$1/c$，0，0，0），（0，1，0，0），（0，0，1，0），（0，0，0，1）是自然基的基底。显然，若再实行下述时间坐标的局部变换

$$d\widetilde{x}^0 = c\,d\widetilde{t} \tag{7.104}$$

则（1，0，0，0），（0，1，0，0），（0，0，1，0），（0，0，0,1）就是自然基的基底，根据张量在坐标变换（7.102）和（7.104）式下的变换规律可导出（7.101）式。

现在来求出施瓦西场采用各向同性坐标系时的本征基。令

$$\widetilde{e}_{(a)} = (Q,\ I,\ J,\ K) \tag{7.105}$$

$$\hat{e}_{(a)} = (q,\ i,\ j,\ k) \tag{7.106}$$

分别表示自然基和本征基。注意这里的4维逆变向量没有在右上角加指标，$\hat{e}_{(0)}=q$，$\hat{e}_{(1)}=i$，依次类推。自然基和本征基本身可以看成是观测者局部时空邻域里的局部坐标系。设自然基对应$\widetilde{S}$系，本征基对应$\hat{S}$系。从前面的讨论可见，若用$d\widetilde{x}^\mu$和$d\hat{x}^\mu$分别表示这两个局部坐标系，则度规在观测者处为

$$dS^2 = -(d\widetilde{x}^0)^2 + d\widetilde{x}^i d\widetilde{x}^i = -(d\hat{x}^0)^2 + d\hat{x}^i d\hat{x}^i \tag{7.107}$$

因此，从$\hat{S}$系到$\widetilde{S}$系是一个洛伦兹变换，有

$$d\widetilde{x}^\mu = \sqcap^\mu_\nu d\hat{x}^\nu \tag{7.108}$$

其中洛伦兹变换矩阵$\sqcap^\mu_\nu$可由（7.19）和（7.21）式得出，但要注意天文上习惯给出“运动”观测者相对“静止”观测者的速度，亦即$\hat{S}$系相对$\widetilde{S}$系的速度，因此（7.19）和（7.21）式中的$\vec{v}$应当换为$-\vec{v}$，此外，应当用$x^0=ct$和$x'^0=ct'$代替t和t'，于是可写出$\sqcap^\mu_\nu$的分块形式为

$$\sqcap^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \beta & \beta\vec{v}^{\mathrm{T}}/c \\ \beta\vec{v}/c & \overleftrightarrow{U} + \dfrac{\beta^2\vec{v}\,\vec{v}^{\mathrm{T}}}{c^2(\beta+1)} \end{pmatrix} \tag{7.109}$$

其中$\vec{v}$是列向量，$\overleftrightarrow{U}$表示坐标为3×3单位矩阵的二阶单位张量。$\sqcap^\mu_\nu$的分量形式为

$$
\bigcap^{\mu}_{\nu}=\begin{pmatrix}
\beta & \beta\dfrac{v_x}{c} & \beta\dfrac{v_y}{c} & \beta\dfrac{v_z}{c}\\[2ex]
\beta\dfrac{v_x}{c} & 1+\dfrac{\beta^2 v_x^2}{c^2(\beta+1)} & \dfrac{\beta^2 v_x v_y}{c^2(\beta+1)} & \dfrac{\beta^2 v_x v_z}{c^2(\beta+1)}\\[2ex]
\beta\dfrac{v_y}{c} & \dfrac{\beta^2 v_y v_x}{c^2(\beta+1)} & 1+\dfrac{\beta^2 v_y^2}{c^2(\beta+1)} & \dfrac{\beta^2 v_y v_z}{c^2(\beta+1)}\\[2ex]
\beta\dfrac{v_z}{c} & \dfrac{\beta^2 v_z v_x}{c^2(\beta+1)} & \dfrac{\beta^2 v_z v_y}{c^2(\beta+1)} & 1+\dfrac{\beta^2 v_z^2}{c^2(\beta+1)}
\end{pmatrix}
\qquad (7.110)
$$

本征基在$\hat{S}$系中的坐标应表示为（1，0，0，0），（0，1，0，0），（0，0，1，0）和（0，0，0，1）。亦即 $\hat{e}^{\mu}_{(\alpha)}=\delta^{\mu}_{\alpha}$，经由（7.108）式的坐标变换后，按逆变张量变换规律，在$\tilde{S}$系中它的坐标分量应当就是$\bigcap^{\mu}_{\alpha}$，亦即

$$
\left.\begin{aligned}
q&=\bigcap^0_0 Q+\bigcap^1_0 I+\bigcap^2_0 J+\bigcap^3_0 K\\
i&=\bigcap^0_1 Q+\bigcap^1_1 I+\bigcap^2_1 J+\bigcap^3_1 K\\
j&=\bigcap^0_2 Q+\bigcap^1_2 I+\bigcap^2_2 J+\bigcap^3_2 K\\
k&=\bigcap^0_3 Q+\bigcap^1_3 I+\bigcap^2_3 J+\bigcap^3_3 K
\end{aligned}\right\}\qquad (7.111)
$$

将（7.110）式代入上式，得

$$
\left.\begin{aligned}
q&=\beta Q+\frac{\beta}{c}(v_x I+v_y J+v_z K)\\
i&=I+\frac{\beta v_x}{c(\beta+1)}(q+Q)\\
j&=J+\frac{\beta v_y}{c(\beta+1)}(q+Q)\\
k&=K+\frac{\beta v_z}{c(\beta+1)}(q+Q)
\end{aligned}\right\}\qquad (7.112)
$$

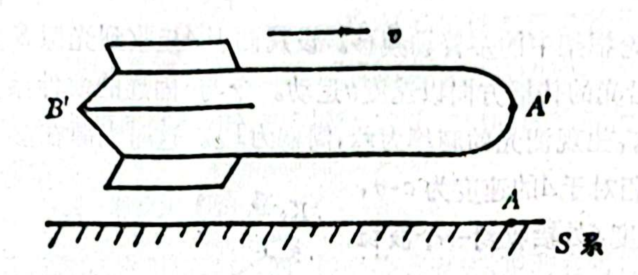
第七章　习　　题

1.一固有长度为l_0的火箭飞船以恒速v相对S系运动（见图），船的头部A'在$t=t'=0$时通过S系的点A，此时有一光信号从A'送向船尾B'，问

（1）按火箭飞船的时间t'，该信号何时到达船尾？

（2）按S系中的时间t，该信号何时到达B'？

（3）按S系中的时间t，船尾B'何时通过A点？



2.一个在月球上的人，看到两艘飞船A和B从两个相反的方向分别以速度$0.8c$和$0.9c$向着他飞来。试问

（1）在A船上的观测者测得他自己以多大的速度飞向月球？以多大的速度飞向B船？

（2）在B船上的观测者测得他自己以多大的速度飞向月球？以多大的速度飞向A船？

解题时不考虑月球的引力。

3.设E_1和E_2是狭义相对论中由类时测地线连接的2个事件。证明存在一个广义洛伦兹变换（包括洛伦兹推动，常数空间平移和常数空间转动）把测地线变为时间轴。对2个由类空测地线连结的事件作相应的陈述并予以证明。

4.在狭义相对论中证明沿类时测地线量得的间隔最大，亦即大于沿连结测地线两端的任何其它类时曲线量度所得的结果。

5.证明逆变向量U^μ与协变向量V_μ的内积$U^\mu V_\mu$与坐标系的选择无关。

6.若$A^{\alpha\beta}$，$B^{\alpha\beta}$是两个张量。求证

$$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}=A_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}$$

7.证明（7.37）式中的W^μ_ν是一个二阶混合张量。

8.采用施瓦西标准坐标，给出施瓦西时空里试验体的运动方程，并运用天体力学知识讨论轨道椭圆的可能变化。

9.证明（7.95）式给出的光的4维速度的长度为零。计算准到后牛顿近似。

10.利用自然基和本征基的关系式（7.112）式，证明当（Q，I，J，K）是一个四元基时，（q，i，j，k）组成一个四元基。

第八章　相对论效应

第一节　引力红移和多普勒频移

首先讨论狭义相对论框架中的多普勒频移。设观测者A接收到光源S发来的光信号如图8.1所示。假设A相对S沿光的传播方向以速度v运动。令与S固连的惯性系为K_0系，与A固连的惯性系为K系。设在K_0里观测光的频率为ν_0，周期为T_0。这时光源在参考系K_0里为静止因此ν_0是本征频率。光相对于A的速度为$c-v$，这样用K_0系的时间来量度A处接收到一个波长的时间间隔为

$$T' = T_0 + \frac{vT_0}{c-v} = \frac{T_0}{1-v/c} \qquad (8.1)$$

将时间换成频率，上式成为

$$\nu' = \nu_0(1-v/c) \qquad (8.2)$$



图8.1　径向多普勒频移

这就是经典的多普勒频移公式。然而，观测者A是以自己的原时，即K系中的时间来量度这一时间间隔的。量度的结果为

$$T = T'\sqrt{1-v^2/c^2} = T_0\sqrt{(1+v/c)/(1-v/c)} \qquad (8.3)$$

对应的径向多普勒频移公式为

$$\nu = \nu_0\sqrt{(1-v/c)/(1+v/c)} \qquad (8.4)$$

上述的推导是从K_0系的观测开始的。实际上，直接在K系里计算更为简便，因为这时光相对A的速度为c。

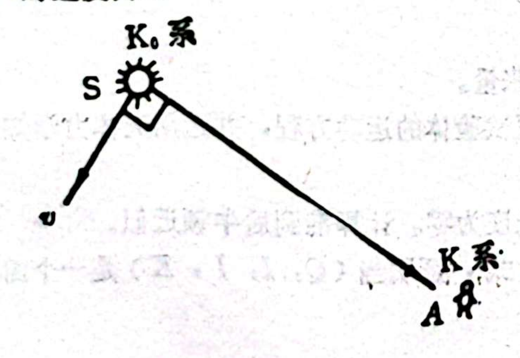


图8.2　横向多普勒频移

现在假定观测者A的速度与光的传播方向相垂直。图8.2给出了从K系看到的情况。在牛顿力学里，这时不会发生谱线移动，即若用K系的时间来量度，S发射一个波长的时间间隔T'等于A接收的时间间隔T，然而T'应当换成与光源S固连的K_0系的时间T_0，于是有

$$T = T' = T_0/\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (8.5)$$

即

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (8.6)$$

这是横向多普勒频移公式。显然，恒有$\nu<\nu_0$，即横向速度永远造成红移。

一般情况下，A相对S的速度与光线传播的方向成θ角，如图 8.3 以示。类似前面的推导，可得

$$T = T_0(1 + v\cos\theta/c)/\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{8.7}$$

即

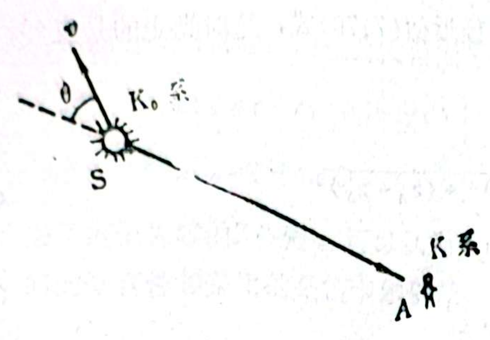


图8.3 一般情况下的多普勒频移

$$\nu = \nu_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\ /(1 + v\cos\theta/c) \tag{8.8}$$

这是多普勒频移的一般公式。注意，相对论效应的量级是$O(v^2/c^2)$

现在假设观测者A相对光源 S 沿光线传播方向以加速度g作加速运动，如图 8.1，这时K_0系是惯性系而K系为加速系。设$t = 0$ 时，K系相对 K_0 系的速度为零，因此观测到光源的辐射频率为本征频率 ν_0。当时间为t时，观测者接收到辐射时的速度为$v = gt$。根据(8.4)式观测者观测到的辐射频率为

$$\nu \simeq \nu_0(1 - v/c) = \nu_0(1 - gl/c^2) \tag{8.9}$$

其中l是t时光源和观测者间的距离。然而，根据等效原理，观测者可以认为K系不是一个加速系而是一个惯性系，但其中存在引力场，引力势为 $\phi = -gl$，在观测者处引力势为零。于是(8.9)式可改写成

$$\nu \simeq \nu_0\left(1 - \frac{\phi_A - \phi_S}{c^2}\right) \tag{8.10}$$

当光子从引力势值小的地方传播到引力势值大的地方，就产生了红移。观测者会把这种红移现象解释为引力所造成，这称为引力红移。地面上的观测者观测恒星发射来的光时，谱线的频移中就应包含引力红移。

在引力场中如果光源和观测者都不是静止的，那么除了引力红移外还应有多普勒红移。下面就施瓦西场的情况导出两者的综合公式。

设在光源S处的两个邻近事件的间隔用S处的原时来量度为 $d\tau_S$，这些事件通过光传播到观测者A处，用A处的原时量度这两个信号到达的时间间隔为$d\tau_A$。定义红移Z为

$$d\tau_A/d\tau_S = 1 + Z \tag{8.11}$$

即

$$\nu_S/\nu_A = 1 + Z \tag{8.12}$$

注意，上式中ν_S是本征频率，ν_A是观测者A处观测到的频率。当Z大于零时表示红移，小于零时表示蓝移。

$d\tau_S$和$d\tau_A$量度的是完全不同的两个事件间隔，前者发生在S处，后者发生在A处，要把两者联系起来只有通过光辐射在施瓦西场中的传播，为此要用到时间坐标t。设dt_S和dt_A分别表示与$d\tau_S$和$d\tau_A$对应的时间坐标间隔，则有

$$\frac{d\tau_A}{d\tau_S} = \frac{d\tau_A}{dt_A}\cdot\frac{dt_A}{dt_S}\cdot\frac{dt_S}{d\tau_S} \tag{8.13}$$

上式等号右端第 1 和第 3 个因子表示同一地点的坐标时间隔dt和原时间隔$d\tau$的关系。利用各向同性坐标系中的施瓦西度规的牛顿近似(7.74)式，若准到小量的一次幂，有

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{m}{r} - \frac{v^2}{2c^2} \tag{8.14}$$

其中v是光源或观测者在所取的坐标系中的速度，r是到引力中心的距离。(8.13)式右端第2个因子的计算要用到光线的传播。利用度规的牛顿近似(7.76)式，这时光走的是直线，有

$$t_A - t_S = \rho/c \tag{8.15}$$

其中

$$\rho = \sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2 + (z_A - z_S)^2} \tag{8.16}$$

于是有

$$dt_A/dt_S = 1 + v_r/c \tag{8.17}$$

其中$v_r = \dot{\rho}$可看成是观测者相对光源的视向速度。

联合(8.14)和(8.17)式，准到v^2/c^2和m/r的一次幂，可得到

$$Z = \frac{v_r}{c} + m\left(\frac{1}{r_S} - \frac{1}{r_A}\right) + \frac{1}{2c^2}(v_S^2 - v_A^2) \tag{8.18}$$

其中等号右端第一项为经典的多普勒频移，第二项为引力红移，它是广义相对论效应，第三项为二阶多普勒频移，它是狭义相对论效应。

因为恒星具有视向速度和强引力场，因而从恒星来的辐射存在多普勒频移和引力红移。致密星体有很强的引力场，显然应有较显著的引力红移。自广义相对论诞生以来，人们一直试图用实验验证引力红移，然而由于当时受实验精度的限制，在很长时间内未能成功。第一个验证到引力红移的实验是庞德(R.V.Pound)等于1960年在哈佛大学进行的，实验使用Fe^{57}辐射的r射线在高塔中上下，经受了地球引力场的变化，实验的精度为1％。1962年布罗尔特(J.W.Brault)测得了太阳谱线中的引力红移，精度是5％。后来对白矮星天狼B和波江40B都进行了验证。近年来在脉冲星的观测资料处理中成功地运用了多普勒频移和引力红移的改正公式。只有经过改正以后，才能得到稳定的本征频率。

70年代后验证引力红移和二阶多普勒频移的最好方法是把高稳定的钟放置在人造卫星上，然后从地面接收卫星发来的钟信号。这种方法的实验精度已达10^{-6}或更高些。实际上，接收GPS卫星上发来的钟信号以校正测站的钟是目前使各地测站时间同步的最好的方法。在对钟的过程中，必须考虑这些相对论效应。第六节里将对用卫星进行时间同步的原理作进一步的介绍。在建立国际原子时TAI的方案和软件中目前都已包含引力红移和二阶多普勒频移的改正。

第二节 光线弯曲

在4维时空中光子走的是以$ds^2 = 0$表征的零测地线。在牛顿近似的情况下，度规(7.76)式对应于平直时空，零测地线是直线，因此光线没有弯曲。对于存在引力场的弯曲时空，显然光线不再是直线。下面在后牛顿近似下讨论光线在8维空间里的弯曲情况。

在第七章第五节里，已导出光子的4维速度矢量(7.95)式。设光线从无穷远处射来，经过引力源附近又射向无穷远。在导出(7.95)式所采用的坐标系里，光子的入射和离去可分别

认为在$x=+\infty$和$x=-\infty$，那里光线的4维方向分别为

$$\left.\begin{aligned} u^{i}_{-\infty} &= (1, -c, -2mc/q, 0) \\ u^{i}_{+\infty} &= (1, -c, 2mc/q, 0) \end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

在远离引力源的无穷远处，时空是大范围平直的。将(8.19)式的空间部分写成

$$\left.\begin{aligned} u^{i}_{-\infty} &= (-c, -2mc/q) \\ u^{i}_{+\infty} &= (-c, 2mc/q) \end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

上式略去了值恒为零的Z分量。可以认为空间部分的夹角就是光线经过引力源后的偏转角。根据空间的平直性和采用的是笛卡尔坐标，由(8.20)式使用简单的向量积方法，可计算出该偏转角

$$\eta = \frac{4m}{q} = \frac{4GM}{c^2 q} \tag{8.21}$$

若由零测地线方程(7.89)式也能得到完全相同的结果。

当中心体为太阳时，η的最大值对应q取为太阳的半径，这时得$\eta \approx 1''.75$。

然而，实际的观测者不可能位于离引力源无穷远处。目前精密的天文仪器都是在地面上处于太阳引力场之中，对遥远星体来的辐射，应假设光源在无穷远，因此需要推导无限一有限的光线弯曲公式。而对太阳系内的天体如行星，则需要讨论有限一有限的光线弯曲。显然，行星的情况是最复杂的。只要导出有限一有限的光线弯曲公式，其中令光源的距离趋于无穷远时，就可以得到无限一有限情况下的公式。

在平直时空里，不同地点的两个向量的夹角是有明确定义的，只要把两向量无限延长乃致相交即可。在弯曲空间里，不同地点的两个向量之间的夹角并无定义。所以，与无穷一无穷这一经典情况不同，首先必须给出光线弯曲的定义。

设光在$t-\tau$时离开光源，在t时到达观测者。其中τ称为光行时，它是从光源到观测者所经历的坐标时间隔而非原时间隔，采用τ这一符号是按照天文上习用的传统。由第七章第六节知，在t时的观测者处有一个局部坐标架——自然基，它对应着一个“静止”观测者，他观测到的光线的3维空间方向称为自然方向。注意自然方向和光线传播方向正好相反。假设$t-\tau$时光源在给定坐标系里的3维空间坐标为x^i_S，t时观测者的相应空间坐标为x^i_O，这里下标S和O分别代表光源和观测者，上标i取值从1到3。注意x^i_S和x^i_O都不是张量。形式上我们可以建立

$$\rho^i = \rho S^i = x^i_S(t-\tau) - x^i_O(t) \tag{8.22}$$

其中

$$\rho = \sqrt{(\rho^1)^2 + (\rho^2)^2 + (\rho^3)^2} \tag{8.23}$$

“单位向量”S^i定义为$t-\tau$时光源相对t时观测者的坐标方向。坐标方向与自然方向完全不同，它不是一个张量。然而只要给定坐标系，坐标方向和自然方向的各分量就能被计算。若令e^i为自然方向，则可定义光线弯曲为

$$\sigma^i = e^i - S^i \tag{8.24}$$

上述定义符合目前天文历表编算中采用的算法。显然，如果空间是平直的，e^i和S^i有相同的分量。在弯曲时空的情况，无法严格地定义光线弯曲。在方位天文的归算中涉及到包括光线弯曲在内的各种系统改正，只要它们的总体效应能使归算的结果正确就行了。

(7.95)式给出光在施瓦西各向性坐标系里的4维传播方向u^μ，即

$$u^\mu=\left(1+\frac{2m}{r},\ -c,\ \frac{2mcx}{rq},\ 0\right) \tag{8.25}$$

利用(7.99)式可得到计算具有4维速度Q^μ的观测者观测到光线3维空间方向的表达式，亦即自然方向为

$$e^\mu=\frac{u^\mu+(u,\ Q)Q^\mu}{(u,\ Q)} \tag{8.26}$$

上式中Q^μ可根据(7.101)式第一式计算，若准到m的一次幂，则有

$$Q^\mu=\left(\frac{1+\dfrac{m}{r}}{c},\ 0,\ 0,\ 0\right) \tag{8.27}$$

黎曼内积$(u,\ Q)$可利用度规(7.77)式计算，结果为

$$(u,\ Q)=-c\left(1+\frac{m}{r}\right) \tag{8.28}$$

于是，(8.26)式成为

$$e^\mu=\left(0,\ 1-\frac{m}{r},\ -\frac{2mx}{rq},\ 0\right) \tag{8.29}$$

容易证明，若准到m的一次幂，e^μ是一个长度为1的类空向量，它的指向与X轴正向基本上一致。在自然基里它的分量为

$$\left.\begin{aligned}
e^t&=(e,\ Q)=0\\
e^x&=(e,\ I)=1\\
e^y&=(e,\ J)=-\frac{2mx}{rq}\\
e^z&=(e,\ K)=0
\end{aligned}\right\} \tag{8.30}$$

在计算上式的黎曼内积时也利用了(7.77)和(7.101)式。设在t时观测者的空间坐标为$(X,\ Y,\ Z)$，观测者到引力中心的距离为R，则矢量e^μ在自然基里的空间分量为

$$e^i=\left(1,\ -\frac{2mx}{Rq},\ 0\right) \tag{8.31}$$

若选取第七章第五节中所采用的坐标系，光线基本上沿X轴负方向传播，这样(8.31)式正是所求的自然方向。

在施瓦西各向同性坐标系里，设光源在$t-\tau$时的空间坐标为$x_s^i=(x,\ y,\ z)$，这一点在光的路径上，若选取第七章第五节中所采用的坐标系，应当有$z=0$，x和y满足(7.89)式。因此

$$x_0^i(t-\tau)=(x,\ q-\frac{2mr}{q},\ 0) \tag{8.32}$$

而观测者在t时的坐标则为

$$x_0^i(t)=(X,\ q-\frac{2mR}{q},\ 0) \tag{8.33}$$

将(8.32)和(8.33)式代入(8.22)式，准到m的一次幂得 $t-\tau$ 时光源相对t时观测者的坐标方向为

$$S^i=(1\ ,\ \frac{2m(R-r)}{q\rho},\ 0) \tag{8.34}$$

其中

$$\rho=x-X \tag{8.35}$$

根据光线弯曲定义(8.24)式，立即得

$$\sigma^i=(0,\ -\frac{2mX}{Rq}-\frac{2m(R-r)}{\rho q},\ 0) \tag{8.36}$$

上式与坐标系的选取有关。下面给出与坐标系选取无关的向量形式的数学表达式。

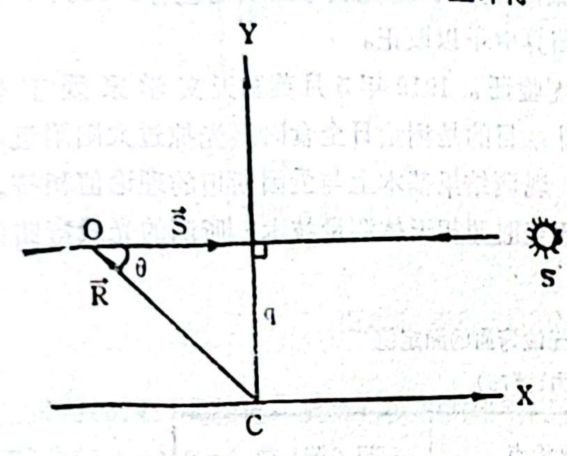


图8.4 牛顿近似下光线的传播

图8.4给出了牛顿近似下光线的传播。选取第七章第五节中采用的坐标系。光在$t-\tau$时离开光源S，沿X轴负方向直线传播，在t时到达观测者O。光线到引力中心C的距离为q。设O的位置矢量为$\vec{R}$，光源的坐标方向为$\vec{S}$。根据(8.36)式，可将光线弯曲看成是矢量$\vec{\sigma}$沿Y轴的负方向，在该方向的分量为$2mX/(Rq)+2m(R-r)/(\rho q)$。从图8.4知，$\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{R})$的结果也沿$Y$轴的负方向，其大小为$q$，此外，在牛顿近似下有

$$X=\vec{R}\cdot\vec{S} \tag{8.37}$$

$$q^2=R^2-(\vec{R}\cdot\vec{S})^2 \tag{8.38}$$

于是(8.36)式可改写成下述向量形式的表达式

$$\vec{\sigma}=\frac{2m}{R^2-(\vec{R}\cdot\vec{S})^2}\left(\frac{R-r}{\rho}+\frac{\vec{R}\cdot\vec{S}}{R}\right)\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{R}) \tag{8.39}$$

由于光线弯曲本身是m量级的小量，因而上式实际上准到m的一次幂，它是在施瓦西各向同性坐标系里的后牛顿近似下的结果。

对太阳系内的天体，计算光线弯曲应采用(8.39)式。当在地心观测行星时，矢量$\vec{R}$和$\vec{r}$则分别表示在观测时刻地心的日心位置矢量和光发射时刻行星的日心位置矢量，R和r为相应矢量的大小，$\vec{\rho}=\vec{r}-\vec{R}=\rho\vec{S}$，$m=GM_\odot/c^2$，$M_\odot$为太阳的质量。

当光源为太阳系以外的天体，就成为无限—有限情况，这时$r\simeq\rho\simeq\infty$，(8.39)式改写成

$$\vec{\sigma}=\frac{-2m}{R(R+\vec{R}\cdot\vec{S})}\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{R}) \tag{8.40}$$

上式就是对遥远天体的光线弯曲公式。其中与天体有关的量只有从地球看天体方向的单位向量$\vec{S}$，也可把$\vec{S}$看成是引力中心到天体方向的单位向量，两者的差别按经典的术语讲即视差。由于m为小量，对太阳系外的天体该视差完全可以忽略。

(8.40)式也可写成标量形式。由图8.4可得$\vec{R}\cdot\vec{S}=-R\cos\theta$，$|\vec{R}\times\vec{S}|=R\sin\theta$，其中$\theta$为从观测者看引力中心方向和天体方向之间的夹角。于是，由(8.40)式可求得光线的偏转角为

$$\eta=|\vec{\sigma}|=\frac{2m}{R}\cot\frac{\theta}{2} \tag{8.41}$$

显然光线总是朝着引力源偏转。

应当指出，上述定义和导出的光线弯曲依赖于坐标系的选择。如果直接从施瓦西标准坐标出发，会得到略有不同但形式更复杂的公式。在上述推导光线的偏转角时曾引入一些形式上的欧氏向量并进行了运算，因而求得的η并不是一个与坐标系选择无关的标量。显然，在弯曲时空中很难给出与坐标选择无关的纯几何的光线弯曲定义和公式。

目前天文测角精度已达0″.001，即使在离太阳角距90°处光线弯曲改正也有0″.004，因此光线弯曲作为一项系统差应在高精度的天文归算中予以改正。

历史上，光线弯曲曾作为广义相对论的实测验证。1919年5月英国天文学家爱丁顿(Eddinton)组织二支观测队分赴巴西和非洲，目的是测量日全食时星光掠过太阳附近产生的光线弯曲，这是对光线弯曲的第一次观测。观测结果基本上与爱因斯坦的理论值相符。表8.1给出各次日全食光线弯曲的测定值。限于当时照相天体测量技术，所测的光线弯曲偏转角与爱因斯坦的理论值并没有精确相符。

表8.1 各次日全食时光线弯曲的测定值

(理论值为1.″75)

日全食日期	日全食地点	观测值
1919年5月29日	巴西	1″.98±0″.16
1919年5月29日	非洲	[illegible]″.61±0″.[illegible]0
1922年9月21日	澳大利亚	1″.72±0″.15
1929年5月9日	苏门答腊	2″.24±0″.10
1936年6月19日	苏联	2.73±0″.31
1936年6月19日	日本	[illegible]″.28±0″.13
1947年5月20日	巴西	2″.01±0″.27
1952年2月25日	苏丹	1″.[illegible]0±0″.10
1973年6月30日	毛里塔尼亚	1″.60±0″.13

VLBI技术可以高精度地测定射电源辐射在太阳引力场中的偏转。自1970年来已进行了一系列这类观测，图8.5给出了观测结果。图中的γ是区分各种引力理论的一个参数。除广义相对论外，还存在着其它的引力理论，它们也预言了光线的弯曲，但数值并不相同。各种引力理论预报的光线偏转公式可以写为

$$\eta=(1+\gamma)\frac{m}{R}\cot\frac{\theta}{2}$$

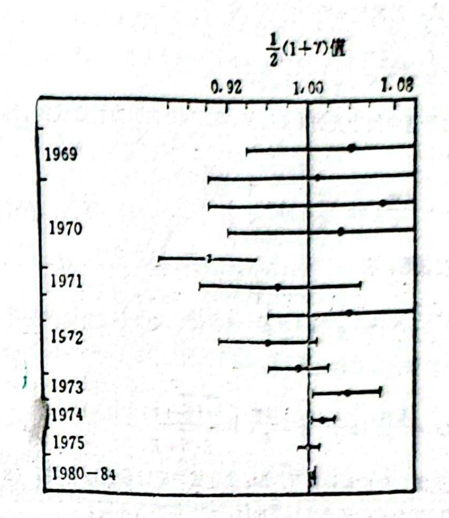


图8.5 射电波偏转观测对$\frac{1}{2}(1+\gamma)$的测定值

上式与(8.41)式相比，显然广义相对论对应$\gamma=1$，图中8.5的最后一次测定值(年)为$(1+\gamma)/2=1.004\pm0.003$。

第三节　引力时延

在平直的空间中光的传播速度是不变的数值c。当存在引力场时，光的坐标速度不再是常数，这表示在引力场中光从一点传播到另一点所经历的时间间隔并不就是两点距离除以c。本节将详细讨论这一问题。

从施瓦西各向同性坐标系出发。由(7.95)式可得

$$c\frac{dt}{dx}=-\left(1+\frac{2m}{r}\right)$$

采用上节的符号，仅把光行时τ改写成Δt，对(8.43)式进行积分，积分下限是光源，上限是观测者，于是有

$$C\,\Delta t=x-X+\int_X^x\frac{2m}{r}dx$$

由(8.32)和(8.33)式得

力理论预报的光线偏转公式可以写为

$$\eta=(1+\gamma)\frac{m}{R}\cot\frac{\theta}{2} \tag{8.42}$$

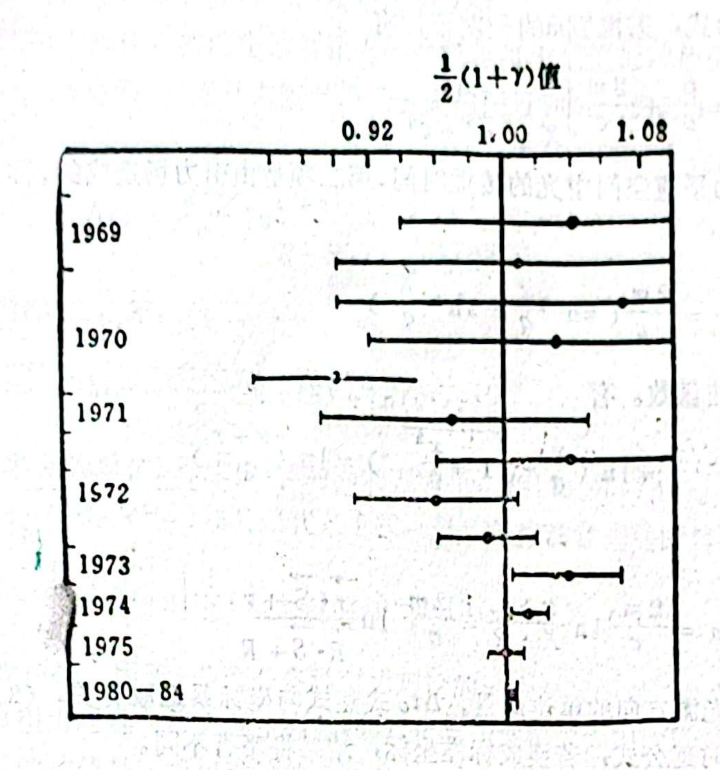


图8.5 射电波偏转观测对 $\frac{1}{2}(1+\gamma)$ 的测定值

上式与(8.41)式相比，显然广义相对论对应$\gamma=1$，图中8.5的最后一次测定值(1980—1984年)为$(1+\gamma)/2=1.004\pm0.003$。

第三节 引力时延

在平直的空间中光的传播速度是不变的数值c。当存在引力场时，光的坐标速度就不是常数，这表示在引力场中光从一点传播到另一点所经历的时间间隔并不就是两点间的欧氏距离除以c。本节将详细讨论这一问题。

从施瓦西各向同性坐标系出发。由(7.95)式可得

$$c\frac{dt}{dx}=-\left(1+\frac{2m}{r}\right) \tag{8.43}$$

采用上节的符号，仅把光行时τ改写成Δt，对(8.43)式进行积分，积分下限是光源，上限是观测者，于是有

$$C\,\Delta t=x-X+\int_X^x\frac{2m}{r}dx \tag{8.44}$$

由(8.32)和(8.33)式得



$$\left.\begin{aligned}\rho &= x - X + O(m^2)\\ r &= \sqrt{x^2+q^2} + O(m)\end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

将(8.45)式代入(8.44)式，若准到m的一次幂，有

$$\Delta t = \frac{\rho}{c} + \frac{2m}{c}\int_X^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+q^2}} \tag{8.46}$$

上式等号右端第一项为平直空间中光的传播时间，第二项是由引力场造成的，称为引力时延，并记为Δt_G。容易求得

$$\Delta t_G = \frac{2m}{c}\left(\mathrm{sh}^{-1}\frac{x}{q} - \mathrm{sh}^{-1}\frac{X}{q}\right) \tag{8.47}$$

其中sh^{-1}为反双曲正弦函数。有

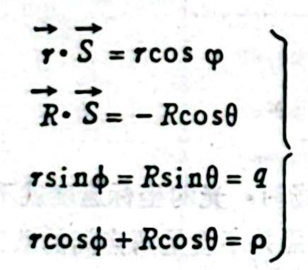
$$\mathrm{sh}^{-1}\frac{x}{q} = \ln\left(\frac{x}{q} + \sqrt{1+\frac{x^2}{q^2}}\right) = \ln\left(\frac{x+r}{q}\right) \tag{8.48}$$

于是(8.47)式成为

$$\Delta t_G = \frac{2m}{c}\ln\frac{x+r}{X+R} = \frac{2m}{c}\ln\frac{\vec{r}\cdot\vec{S}+r}{\vec{R}\cdot\vec{S}+R} \tag{8.49}$$

其中$\vec{S}$是从观测者看光源方向的单位向量。Δt_G表达式与坐标系选取有关，(8.49)式是各向同性坐标系下的引力时延公式，若换成标准坐标，结果将略有不同。

(8.49)式还可写成其它形式。图8.6中标出了引力时延公式中的各量。由于Δt_G表达式中含小量m，因而各量间关系的计算可按平直空间来处理。由图8.6可得



$$\left.\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{S} &= r\cos\varphi\\ \vec{R}\cdot\vec{S} &= -R\cos\theta\\ r\sin\phi &= R\sin\theta = q\\ r\cos\phi + R\cos\theta &= \rho\end{aligned}\right\} \tag{8.50}$$

图8.6 引力时延

故

$$\frac{r(1+\cos\phi)}{R(1-\cos\theta)} = \frac{R(1+\cos\theta)}{r(1-\cos\phi)} = \frac{r+R+r\cos\phi+R\cos\theta}{r+R-r\cos\phi-R\cos\theta} \tag{8.51}$$

最后(8.49)式成为

$$\Delta t_G = \frac{2m}{c}\ln\frac{r+R+\rho}{r+R-\rho} \tag{8.52}$$

上式是引力时延最常见的形式。

由(8.52)式可见，在引力场中光无论在哪两点间进行传播，恒有$\Delta t_G > 0$。由施瓦西

各向同性度规(7.71)式可得光的坐标速度为$c(1-\frac{m}{2r})/(1+\frac{m}{2r})^3$，其值恒小于$c$，从而也得到$\Delta t_G>0$的结论。在空间实验中，光波常需往返传播，可近似地认为光波来回的3维路径相同，因此总延迟约为(8.52)式给出的2倍。

为了验证引力理论，实测中通常让光的路径经过太阳附近，使引力时延足够大而便于检测，这时$q\ll r$，$q\ll R$。当光从太阳一侧经过太阳附近到另一侧时，θ和φ就在第一象限，由(8.49)式有

$$\Delta t_G=\frac{2m}{c}\ln\frac{r+r\sqrt{1-q^2/r^2}}{R-R\sqrt{1-q^2/R^2}} \tag{8.53}$$

上式展开准到q的二次幂，得

$$\Delta t_G=\frac{2m}{c}[\ln(4R)-\ln(q^2/r)] \tag{8.54}$$

通常q用太阳半径为单位，太阳半径约为70万公里，相当0.0047AU。将地心的日心距$R=1$AU和$m=GM_\odot/c^2=1.5$公里代入上式，最后得光波往返的时延公式为

$$2\Delta t_G=\frac{1}{2}(1+\gamma)[240-20\ln(q^2/r)]\quad(\text{微秒}) \tag{8.55}$$

其中r用AU为单位。因子γ是区分各种引力理论的一个参数。对广义相对论$\gamma=1$。

太阳系里引力时延一般为几十微秒(μs)，但当光波掠过太阳附近时，可以达到几百微秒，因此引力延迟的数值是在可以检测的范围之内。

对于激光测卫，如果在日心系或太阳系质心系中进行讨论，必须考虑太阳和地球引力场造成的引力时延。但如果采用地心坐标系，太阳的引力作用变成了起潮力，其相对论效应就可以忽略，只需考虑地球造成的引力时延。这时，可以采用施瓦西模型，把地球作为唯一引力源，前面的推导和公式完全适用。第七章第五节中给出地球的m约为4毫米，激光地球动力学卫星(LAGEOS)激光测距资料中的引力时延也是毫米的量级，LAGEOS资料处理结果的外部符合精度已达厘米级，因此归算中应考虑引力时延。

一次激光测距或雷达测距观测涉及3个时刻，脉冲发射时刻t_1，到达目标的时刻t_2，返回到测站的时刻t_3；也涉及到测站在t_1和t_3时的位置矢量$\vec{R}(t_1)$和$\vec{R}(t_3)$，以及目标在t_2时的位置矢量$\vec{r}(t_2)$。观测量是t_3-t_1。

令

$$\left.\begin{aligned}\rho_{12}&=|\vec{R}(t_1)-\vec{r}(t_2)|\\ \rho_{23}&=|\vec{R}(t_3)-\vec{r}(t_2)|\end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

利用(8.46)和(8.52)式可得

$$\left.\begin{aligned}c(t_2-t_1)&=\rho_{12}+2m\ln\frac{r(t_2)+R(t_1)+\rho_{12}}{r(t_2)+R(t_1)-\rho_{12}}\\ c(t_3-t_2)&=\rho_{23}+2m\ln\frac{r(t_2)+R(t_3)+\rho_{23}}{r(t_2)+R(t_3)-\rho_{23}}\end{aligned}\right\} \tag{8.57}$$

$R(t_1)$和$R(t_3)$，ρ_{12}和ρ_{23}的差异是由于测站的速度引起的，在以m为因子的引力时延项里，这些差异可以忽略，于是得

$$c(t_3-t_1)=\rho_{12}+\rho_{23}+4m\ln\frac{r+R+\rho}{r+R-\rho} \tag{8.58}$$

其中引力时延项中各量的下标和对应的时刻已略去，ρ_{12}和 ρ_{23} 是在不同时刻的测站和目标的位置矢量之差的模。

令$\dot{\vec{R}}$和$\ddot{\vec{R}}$分别表示测站在t_2时的速度和加速度向量。由(8.56) 式，准到速度的 2 次幂和加速度的 1 次幂可得

$$\rho_{12}=\left|\vec{\rho}-\dot{\vec{R}}(t_1-t_2)-\frac{1}{2}\ddot{\vec{R}}(t_1-t_2)^2\right|$$

$$=\rho\Big[1-\frac{\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{R}}}{\rho^2}(t_1-t_2)-\frac{1}{2}\frac{\vec{\rho}\cdot\ddot{\vec{R}}}{\rho^2}(t_1-t_2)^2$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{R}}}{\rho^2}(t_1-t_2)^2-\frac{1}{2}\frac{(\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{R}})^2}{\rho^4}(t_1-t_2)^2\Big] \tag{8.59}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\vec{\rho}&=\vec{r}(t_2)-\vec{R}(t_2)\\ \rho&=|\vec{\rho}|\end{aligned}\right\} \tag{8.60}$$

对ρ_{23}有类似的表达式。故

$$\rho_{12}+\rho_{23}=2\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{R}}}{\rho}[(t_1-t_2)+(t_3-t_2)]$$

$$+\frac{1}{2\rho}\left(\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{R}}-\vec{\rho}\cdot\ddot{\vec{R}}-\frac{(\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{R}})^2}{\rho^2}\right)[(t_1-t_2)^2+(t_3-t_2)^2] \tag{8.61}$$

上式右端最后一项包含速度平方和加速度，因此为 2 级小量，故可用零级似近取代，有

$$(t_1-t_2)^2+(t_3-t_2)^2=2\left(\frac{\rho}{c}\right)^2 \tag{8.62}$$

右端第二项含速度一次幂，因此t_1-t_2和t_3-t_2必须准到一级近似。将(8.59)式代入 (8.57)式第一式，取到速度一次幂，得

$$c(t_2-t_1)=\rho+\frac{\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{R}}}{\rho}(t_2-t_1) \tag{8.63}$$

由上式可得到t_1-t_2。类似地可得到t_3-t_2。故

$$(t_1-t_2)+(t_3-t_2)=-2\frac{\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{R}}}{c^2} \tag{8.64}$$

将(8.62)和(8.64)式代入(8.61)式，然后再代入(8.58)式，最后得

$$c(t_3-t_1)=2\rho+\rho\Big[\frac{\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{R}}}{c^2}+\Big(\frac{\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{R}}}{c}\Big)^2-\frac{\vec{\rho}\cdot\ddot{\vec{R}}}{c^2}\Big]$$

$$+4m\ln\frac{r+R+\rho}{r+R-\rho}$$

上式等号右端的各量都在t_2时取值，(8.65)式就是激光测距和雷达测距观
公式。若LAGEOS激光测距资料在地心坐标系中处理，由于测站在地心
0.5公里/秒，加速度项里含有因子$(\rho/R)^2$，因而(8.65)式等号右端第二项

引力时延与水星近日点进动，引力红移以及光线弯曲现象不同，它并
的相对论效应
夏皮罗（I.I.S
所以也称为夏
起向大行星发
回波进行引力
行星表面高低
高，70年代在
号和7号上安
实验，但太阳
机性的摄动因
易精确预报。7
主动雷达的装
测定引力时延的
高。图8.7给出
引力时延的测定
定光线偏转一

$\frac{1}{2}(1+\gamma)$值

0.92　1.00　1.08

水星，金星的雷达回波观测
1968
1971
主动雷达
1975
着陆飞船
水手9号 1977—1978
海盗号 1977—1979
(±0.001)

图8.7　引力时延的雷达测定

$(1+\gamma)/2$表示。从图可见，广义相对论($\gamma=1$)与观测结果符合得很好，
定值（利用海盗号着陆飞船）的测定精度达到千分之一。

第四节　VLBI观测的相对论模型

VLBI观测也涉及引力时延。图8.8画出了VLBI观测的基本原理。天线A和天线B同时观测在单位向量$\vec{S}$方向的射电源。在日心施瓦西各向同性坐标系中，射电源在坐标时t_e辐射一信号，这时其空间位置为$\vec{x}(t_e)$。天线A和B分别于t_A和t_B时收到该信号，它们的空间位置矢量分别为$\vec{x}_A(t_A)$和$\vec{x}_B(t_B)$。可以认为观测量是t_B-t_A。由（8.46）和(8.49)式可得

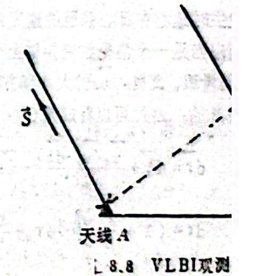


图8.8　VLBI观测

$$c(t_3-t_1)=2\rho+\rho\left[\frac{\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{R}}}{c^2}+\left(\frac{\vec{\rho}\cdot\dot{\vec{R}}}{c}\right)^2-\frac{\vec{\rho}\cdot\ddot{\vec{R}}}{c^2}\right]$$

$$+4m\ln\frac{r+R+\rho}{r+R-\rho} \tag{8.65}$$

上式等号右端的各量都在t_2时取值。(8.65)式就是激光测距和雷达测距观测中所采用的时延公式。若LAGEOS激光测距资料在地心坐标系中处理，由于测站在地心系中的速度不超过0.5公里/秒，加速度项里含有因子$(\rho/R)^2$，因而(8.65)式等号右端第二项可以忽略。

引力时延与水星近日点进动，引力红移以及光线弯曲现象不同，它并不是爱因斯坦揭示的相对论效应。直到1964年才被夏皮罗（I.I.Shapiro）指出，所以也称为夏皮罗时延。60年代起向大行星发射雷达信号并接收回波进行引力时延的验证。由于行星表面高低不平，因而精度不高，70年代在宇宙飞船水手6号和7号上安装了主动雷达进行实验，但太阳风，大阳光压等随机性的摄动因素使飞船的位置不易精确预报。70年代末将安装有主动雷达的装置送到火星上，使测定引力时延的精度大幅度地提高。图8.7给出了用雷达技术对引力时延的测定。和第二节里测定光线偏转一样，测定值用$(1+\gamma)/2$表示。从图可见，广义相对论($\gamma=1$)与观测结果符合得很好，图中最后一次测定值（利用海盗号着陆飞船）的测定精度达到千分之一。

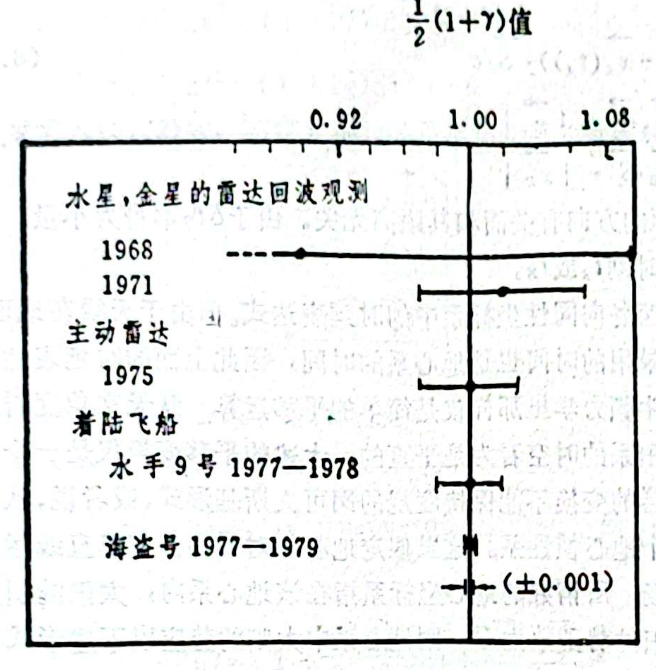


图8.7　引力时延的雷达测定

第四节　VLBI观测的相对论模型

VLBI观测也涉及引力时延。图8.8画出了VLBI观测的基本原理：天线A和天线B同时观测在单位向量$\vec{S}$方向的射电源。在日心施瓦西各向同性坐标系中，射电源在坐标时t_e辐射一信号，这时其空间位置为$\vec{x}(t_e)$。天线A和B分别于t_A和t_B时收到该信号，它们的空间位置矢量分别为$\vec{x}_A(t_A)$和$\vec{x}_B(t_B)$。可以认为观测量是t_B-t_A。由(8.46)和(8.49)式可得

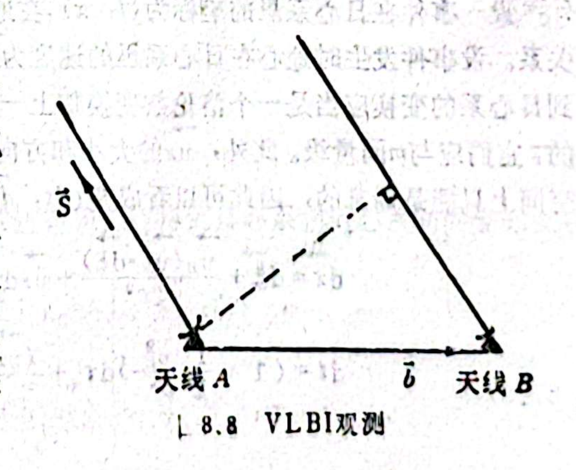


图8.8　VLBI观测

$$
\left.\begin{aligned}
c(t_A-t_e) &= (\vec{x}(t_e)-\vec{x}_A(t_A))\cdot\vec{S}+2m\ln\frac{\vec{x}\cdot\vec{s}+|\vec{x}|}{\vec{x}_A\cdot\vec{s}+|\vec{x}_A|}\\
c(t_B-t_e) &= (\vec{x}(t_e)-\vec{x}_B(t_B))\cdot\vec{S}+2m\ln\frac{\vec{x}\cdot\vec{s}+|\vec{x}|}{\vec{x}_B\cdot\vec{s}+|\vec{x}_B|}
\end{aligned}\right\}\tag{8.66}
$$

这里忽略了从天线 A 和天线 B 看射电源方向上的差别，也就是认为射电源在无穷远处。由(8.66)式可得

$$
\delta t=t_B-t_A=\delta t_N+\delta t_G \tag{8.67}
$$

其中

$$
\delta t_N=-(\vec{x}_B(t_B)-\vec{x}_A(t_A))\cdot\vec{S}/c \tag{8.68}
$$

$$
\delta t_G=\frac{2m}{c}\ln\frac{\vec{x}_A\cdot\vec{S}+|\vec{x}_A|}{\vec{x}_B\cdot\vec{S}+|\vec{x}_B|} \tag{8.69}
$$

δt_G为引力时延较差，它只与射电源的方向有关而和其距离无关。由于δt_G本身为小量，因而其表达式中的位置矢量可以对应于时刻t_A或t_B。

(8.67)—(8.69)式为日心施瓦西各向同性坐标系中的时延表达式。但由于天线在地面上，它们的坐标是相对地心的，观测记录用的时间也是地心系的时间，因此上面的时延表达式需要转换到地心系。这个转换不像在牛顿力学里那样仅是简单的平移运算。从天文角度看，有好坏地心坐标之分。例如，若把太阳系的时空看为是平直的，上述的平移变换仅是一个伽利略变换而不是一个洛伦兹变换，这样的变换不能保持度规的闵可夫斯基形式，或者说，从日心惯性系平移到地心后得到的不是一个地心惯性系。这里假定地心相对日心作匀速直线运动，实际的太阳系里还存在太阳的引力场，所谓好的地心坐标系指在该地心系内，太阳的引力以潮汐力的形式出现。若日心系中太阳的势函数为 U，则地心系中太阳的势应以下述形式出现

$$
U(\vec{x})-U(\vec{x}_E)-\frac{\partial U}{\partial \overleftarrow{x}}(\vec{x}_E)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_E) \tag{3.70}
$$

其中$\vec{x}_E$是地心在日心系中的位置矢量。(8.70)式表明，在一个好的地心系中太阳在地心的引力为零，太阳引力表现为潮汐力，这样的地心坐标系接近于惯性系，通常称为准惯性系。(8.70)式也表明，在准惯性系里太阳势的展开式中幂次最低为地心位置矢量的二次项。

设一事件在日心系里的坐标为$(t,\vec{x})$,在地心系里的坐标为$(\tau,\vec{\xi})$。现在来求得两者间的关系。设事件发生时地心在日心系里的速度为$\vec{v}_E$，坐标为$\vec{x}_E$。由上面的讨论知道，地心系到日心系的变换应当是一个洛伦兹变换加上一些附加项，这些附加项是因引力的存在而出现的，它们应与m同量级。此外，$\vec{v}_E$的大小和方向都在不断地变化，这个准洛伦兹变换在时间和空间上只能是局部的，因此可以看成是$(dt,\vec{dx})$和$(d\tau,\vec{d\xi})$间的变换。设该变换的形式为

$$
\left.\begin{aligned}
d\vec{x} &= d\vec{\xi}+\frac{\vec{v}_E(\vec{v}_E\cdot d\vec{\xi})}{2c^2}+\vec{v}_E d\tau+f d\vec{\xi}\\
dt &= \left(1+\frac{1}{2}\frac{v_E^2}{c^2}\right)d\tau+\frac{(\vec{v}_E\cdot d\vec{\xi})}{c^2}+g\,d\tau
\end{aligned}\right\}\tag{8.71}
$$

上式若去掉包含待定常数f，g的项，实际上就是洛伦兹变换(7.19)和(7.21)式，其中令$\vec{v} = -\vec{v}_E$，并以v_E/c为小量展开准到它的2次幂。包含f，g的项是因引力场存在而增加的。

为了求出f和g,我们从光线传播的后牛顿近似度规(7.77)式出发。即

$$dS^2 = -(1-\frac{2m}{r})c^2dt^2 + (1+\frac{2m}{r})\vec{dx}^2 \tag{8.72}$$

对(8.71)式进行微分变换，要求变换后的度规代表一个准惯性系，即忽略m后度规为闵可夫斯基的，并且包含m的项至少有$\vec{\xi}$的2次式作为因子。显然，(8.71)式中与$\vec{v}_E$有关的项在变换时可不必计算。若仅写出主项和含有因子m的项，则有

$$\left.\begin{aligned} \vec{dx}^2 &= (1+2f)\,\vec{d\xi}^2 + \cdots \\ dt^2 &= (1+2g)d\tau^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{8.73}$$

将上式代入(8.72)式，不难发现为满足准惯性系的要求(8.70)式，f和g应选择为

$$\left.\begin{aligned} f &= -\frac{m}{r_E} - \frac{(\vec{a}_E\cdot\vec{\xi})}{c^2} \\ g &= \frac{m}{r_E} + \frac{(\vec{a}_E\cdot\vec{\xi})}{c^2} \end{aligned}\right\} \tag{8.74}$$

其中$\vec{a}_E$为地心在日心系中的加速度。

将(8.74)式代入(8.71)式，得

$$\left.\begin{aligned} \vec{dx} &= \vec{d\xi} + \frac{\vec{v}_E(\vec{v}_E\cdot\vec{d\xi})}{2c^2} + \vec{v}_E d\tau - \frac{m}{r_E}\vec{d\xi} \\ dt &= (1+\frac{1}{2}\frac{v_E^2}{c^2})d\tau + \frac{(\vec{v}_E\cdot\vec{d\xi})}{c^2} + \frac{m}{r_E}d\tau + \frac{(\vec{a}_E\cdot\vec{\xi})}{c^2}d\tau \end{aligned}\right\} \tag{8.75}$$

上式是将日心施瓦西各向同性坐标系转换为地心准惯性系的坐标微分变换。计算准到v_E^2/c^2和m的一次幂。r_E，$\vec{v}_E$和$\vec{a}_E$都是t的函数，等式右边构成一个全微分。(8.75)式第一式中，$\vec{v}_E d\tau = \frac{d\vec{x}_E}{dt}d\tau$项仅是$v_E/c$的一阶项，因此$t$和$\tau$不能互换。利用(8.75)式第二式，可得

$$dt \simeq d\tau + \frac{(\vec{v}_E\cdot\vec{d\xi})}{c^2} \tag{8.76}$$

于是

$$\vec{v}_E d\tau = \vec{v}_E dt - \frac{\vec{v}_E(\vec{v}_E\cdot\vec{d\xi})}{c^2} \tag{8.77}$$

将上式代入(8.75)式第一式，然后对(8.75)式进行积分，得到日心系和地心系间的坐标变换

$$\left.\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x}_E(t) + \vec{\xi} - \frac{\vec{v}_E(\vec{v}_E\cdot\vec{\xi})}{2c^2} - \frac{m}{r_E}\vec{\xi} \\ t &= \int^{\tau}(1+\frac{m}{r_E}+\frac{1}{2}\frac{v_E^2}{c^2})d\tau + \frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{v}_E)}{c^2} \end{aligned}\right\} \tag{8.78}$$

对(8.67)—(8.69)式进行坐标变换．由(8.78)式得

$$\left.\begin{aligned}&\vec{x}_B(t_B)-\vec{x}_A(t_A)=\vec{v}_E(\tau_B-\tau_A)+\vec{b}+\vec{V}_B(\tau_B-\tau_A)\\&\qquad+\frac{\vec{v}_E(\vec{v}_E\cdot\vec{b})}{2c^2}-\frac{m}{r_E}\vec{b}\\&t_B-t_A=(1+\frac{m}{r_E}+\frac{1}{2}\ \frac{v_E^2}{c^2})(\tau_B-\tau_A)+\frac{\vec{v}_E\cdot\vec{b}}{c^2}\\&\qquad+\frac{\vec{v}_E\cdot\vec{V}_B}{c^2}(\tau_B-\tau_A)\end{aligned}\right\}\tag{8.79}$$

其中

$$\vec{b}=\vec{\xi}_B(\tau_A)-\vec{\xi}_A(\tau_A)\tag{8.80}$$

$\vec{b}$为基线矢量，$\vec{V}_B$是天线B在地心系的速度，各向量都在时刻t_B或τ_B计算，与地心有关的 量在日心系中计算，与测站天线有关的量在地心系中计算。

将(8.79)式代入(8.67)—(8.69)式，可得准到零阶的地心系时延公式

$$\delta\tau_0=-(\vec{b}\cdot\vec{S})/c\tag{8.81}$$

准到一阶时为

$$\delta\tau_1=\delta\tau_0[1-(\vec{v}_E+\vec{V}_B)\cdot\vec{S}/c]-(\vec{v}_E\cdot\vec{b})/c^2\tag{8.82}$$

准到二阶时为

$$\begin{aligned}\delta\tau=\delta\tau_0[&1-(\vec{v}_E+\vec{V}_B)\cdot\vec{S}/c+(\vec{v}_E\cdot\vec{S})^2/c^2\\&+2(\vec{v}_E\cdot\vec{S})(\vec{V}_B\cdot\vec{S})/c^2-2m/r_E+\frac{1}{2}v_E^2/c^2\\&+(\vec{v}_E\cdot\vec{V}_B)/c^2]-(\vec{v}_E\cdot\vec{b})/c^2+\frac{1}{2}(\vec{v}_E\cdot\vec{b})(\vec{v}_E\cdot\vec{S})/c^3\\&+(\vec{v}_E\cdot\vec{b})(\vec{V}_B\cdot\vec{S})/c^3+\delta\tau_G\end{aligned}\tag{8.83}$$

其中

$$\delta\tau_G=\frac{2m}{c}\ln\frac{\vec{x}_A\cdot\vec{S}+|\vec{x}_A|}{\vec{x}_B\cdot\vec{S}+|\vec{x}_B|}\tag{8.84}$$

$$\vec{x}=\vec{\xi}+\vec{x}_E\tag{8.85}$$

两天线接收到同一信号所记录下的地心坐标时差$\delta\tau$是观测量 。由 (8.83) 式可见，它是基线矢量$\vec{b}$，源的方向矢量$\vec{S}$及其它天文和地球物理量的函数，从VLBI观测可以解算测站坐标及其漂移，射电源位置及其变化，以及与天球坐标系，地球坐标系有关的量，从而可以研究地球自转，极移，岁差章动等天文和地球物理现象。迄今为止，VLBI 是地面测量中最精确的观测技术之一。

图8.9给出了VLBI实验中时延δt的残差，以纳秒(10^{-9}秒，简称ns)为单位。上图是未经太阳引力时延改正的结果。下图是经过了改正的结果。可以看出，进行相对论效应改正后，

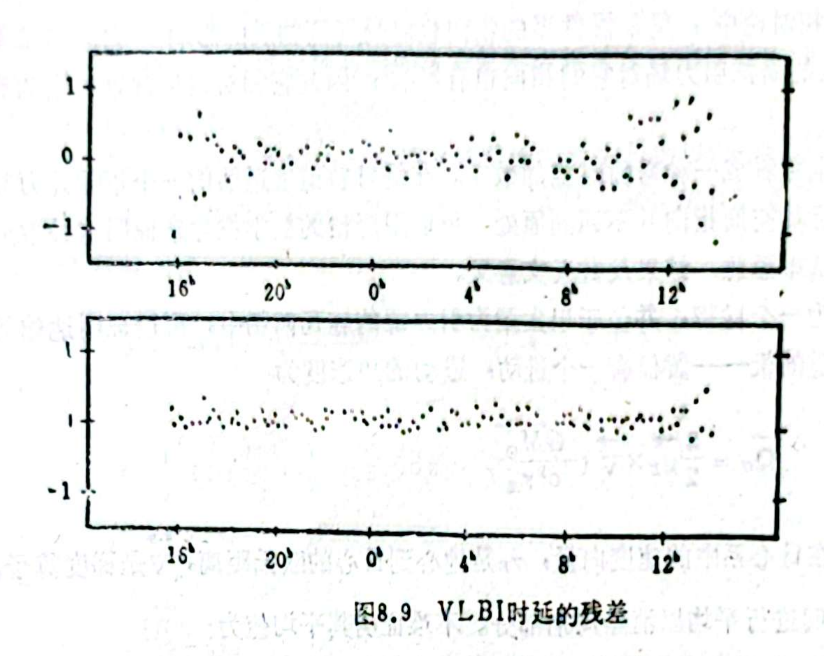


图8.9 VLBI时延的残差

残差弥散度明显地变小。这说明相对论效应在VLBI观测资料处理中的重要性，也说明可以用VLBI观测来验证相对论效应。

第五节 测地岁差

第四章第一节里已经介绍了岁差章动的概念。岁差章动是地轴相对空固坐标系的运动。地球自转轴相对恒星背景存在进动，其力学原因是地球的非球形和日月引力的存在。这两个因素导致地球自转角动量不再守恒。在牛顿力学里，将恒星背景作为惯性系，当存在外力矩时，地球自转轴必然相对惯性系作进动。现设想地球缩小成陀螺的大小，虽然日月引力存在但并不构成外力矩，这样其自转轴相对恒星背景的指向就不再有进动。因此惯性系可由陀螺的指向来具体实现。

在广义相对论里，陀螺可作为局部惯性系的具体实现。设想宇宙飞船足够小，以致可把它看为一个点。宇航员携带一个标准钟和三个方向互相垂直的陀螺，这就构成了一个与宇航员随动的局部惯性系。标准钟指示的原时构成时间坐标，陀螺的指向构成空间坐标轴。若宇宙飞船在作无动力飞行，则上述坐标系的原点将在引力场中自由下落，陀螺将不受任何外力矩作用，按等效原理这就是一个局部惯性系。经过长度标准化后，它就构成了一种四元基，称为费米基。

作为局部惯性系的费米基的空间轴相对恒星背景有否转动？从牛顿力学的观点看，恒星背景代表全局惯性系，两个惯性系的坐标轴之间不可能有相对转动。但在广义相对论里，这个问题的回答就不那么容易。一般情况下不存在全局惯性系，因此无法应用牛顿力学中的逻辑。

物理学家马赫(E.Mach)曾批评牛顿力学，既然无法检测绝对空间的存在，那么有什么理

由说相对恒星无转动的系统是惯性系。马赫认为，不存在脱离物质的抽象的惯性系，指向恒星的坐标系是惯性系，这是由于恒星系统物质作用的结果。这一思想曾对爱因斯坦有很深的影响，在广义相对论中，局部惯性系的指向也应受周围物质的影响，它应当基本上指向恒星，但它附近的局部引力场对它的指向也有影响，因此它相对恒星背景的指向有微小的进动。

这种进动也可看成一种弯曲时空的效应。在绕日轨道上运动的一个不受外力矩作用的陀螺在旋转一周后其空间指向并不回到原处。可以用严格的数学推导来证明这种效应。下面我们仅讲述它的基本思想，结果及其天文意义。

将地球看为一个陀螺，并位于以太阳为引力源的施瓦西场中，可以证明地球的自转轴绕着地球公转轨道的极——黄极有一个进动，进动的角速度为

$$\vec{\Omega}_G = \frac{3}{2}\vec{v}_E \times \vec{\nabla}\left(\frac{GM_\odot}{c^2 r_E}\right) \tag{8.86}$$

其中$\vec{v}_E$是地心在日心系中的速度向量，r_E是地心到日心的欧氏距离，$\vec{\nabla}$是梯度算子。

将$\vec{\Omega}_G$对时间进行平均以消除周期部分。不难证明其平均值为

$$\vec{P}_G = \frac{3GM_\odot n}{2c^2 a(1-e^2)}\vec{k} \tag{8.87}$$

其中a、e和n分别为地球绕日轨道的半长径、偏心率和平均角速度，$\vec{k}$是黄极方向的单位向量。将地球平均轨道根数的数值代入，可得

$$P_G = 1''.92/\text{世纪} \tag{8.88}$$

它的方向恰和日月岁差相反，从北黄极往下看是逆时针进动，我们将这个进动称为测地岁差。(8.88)式的数值显然是不能忽略的。

测地岁差对当前的方位天文主要有以下两方面的影响：

首先，它影响岁差的数值。目前天文常数系统采用的总岁差值来自观测而并非理论推算，特别是黄经日月岁差值完全是观测值。由(8.87)式可见，测地岁差和日月岁差在观测上不能区分，因此现在采用日月岁差值中实际上已经包含了测地岁差的贡献。在由观测值推导其它岁差量的级数展开式时，理论上引入和不引入测地岁差将会导致结果的微小差异。当前通用的IAU1976岁差公式（参见第四章第三节）中已经精确地考虑了测地岁差的贡献。

其次，测地岁差的存在表明，地心处的局部惯性系的空间轴相对恒星背景是转动的，其转动角速度即$\vec{\Omega}_G$。日心坐标系（严格地说应是太阳系质心坐标系）的空间轴在伸向无穷远时相对恒星背景并无旋转。从日心系到地心系的坐标变换如果不考虑转动$\vec{\Omega}_G$，变换后的地心系的空间轴相对恒星背景无转动，这样的地心坐标系称为运动学意义下不旋转的地心坐标系。从日心系到地心系的坐标变换如果考虑转动$\vec{\Omega}_G$，变换后的地心系的空间轴相对恒星背景是转动的，这样的地心坐标系称为动力学意义下不旋转的地心坐标系。

运动学意义下不旋转的地心坐标系不是一个好的准惯性系，这是因为它相对局部惯性系是转动的。在这样的地心系中建立起来的卫星运动方程中必然出现科里奥利力项，从而增加了轨道计算的复杂性，因此应采用动力学意义下不旋转的地心系。1991年在阿根廷举行的

IAU第21届大会上通过的关于参考系的决议里，规定采用运动学意义下不旋转
理由为：（1）参考系的建立需要有实际的天体作为参照，用恒星或河外射
天文学的传统。用这个方法建立的参考系正是运动学意义下不旋转的。（2）
入岁差表达式中，这样从日心系到地心系的变换就不应再计及测地岁差。如
意义下不旋转的地心系，就必须更改现在通用的岁差表达式。

（8.78）式给出的从日心系到地心系的坐标变换中并未包括以$\vec{\Omega}_G$为角速度
因而所求得的地心坐标系是运动学意义下不旋转的。从日心系到动力学意义下
系的坐标变换可写为

$$\left.\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}_E(t) + \vec{\xi} - \frac{\vec{v}_E(\vec{v}_E\cdot\vec{\xi})}{2c^2} - \frac{m}{r_E}\vec{\xi} - \vec{F}\times\vec{\xi} \\ t &= \int^{\tau}\left(1+\frac{m}{r_E}+\frac{1}{2}\frac{v_E^2}{c^2}\right)d\tau + \frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{v}_E)}{c^2}\end{aligned}\right\}$$

其中$\vec{F}$满足

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{\Omega}_G$$

第六节　国际原子时TAI

在介绍TAI的相对论定义前，首先对原时和坐标时的概念作进一步的阐明。

在平直时空的情况，采用闵可夫斯基坐标$(t,\ x^i)$和(7.52)式的度规，即

$$dS^2 = -c^2dt^2 + dx^i dx^i$$

设一个标准钟在该坐标系内作匀速直线运动，与标准钟固连的惯性系中的坐标记
度规为

$$dS^2 = -c^2d\tau^2 + d\xi^i d\xi^i$$

该标准钟在$(\tau,\ \xi^i)$系中为静止，故$d\xi^i = 0$，而在$(t,\ x^i)$系中速度为v^i，故dx^i
标准钟来说，有

$$dS^2 = -c^2d\tau^2 = -c^2(1-v^2/c^2)dt^2$$

式中dS的几何意义是钟的类时世界线上的弧长间隔，它是坐标变换的不变量。
标变换的不变量。τ的意义可以描述为：钟的类时世界线上的弧长，或与钟深
惯性系里的时间。显然τ和t有很大区别，习惯上称τ为原时，t为坐标时。由(8.
者速率的关系为

$$d\tau = \sqrt{1-v^2/c^2}\,dt$$

显然原时比坐标时走得慢，实际上，上式就是时间膨胀现象(7.5)式。当钟不
动时上面的描述仍正确，因为在每一瞬间(8.94)式都成立。

一个理想的标准钟的钟面所指示的时间也与坐标系的选择无关，钟面时就
这样就给出了对原时的第三种描述：钟面指示的时间。这种描述带有实测性的

IAU第21届大会上通过的关于参考系的决议里，规定采用运动学意义下不旋转的地心系，其理由为：（1）参考系的建立需要有实际的天体作为参照，用恒星或河外射电源作为参照是天文学的传统。用这个方法建立的参考系正是运动学意义下不旋转的。（2）测地岁差已归入岁差表达式中，这样从日心系到地心系的变换就不应再计及测地岁差。如果要采用动力学意义下不旋转的地心系，就必须更改现在通用的岁差表达式。

（8.78）式给出的从日心系到地心系的坐标变换中并未包括以$\vec{\Omega}_G$为角速度的空间旋转，因而所求得的地心坐标系是运动学意义下不旋转的。从日心系到动力学意义下不旋转的地心系的坐标变换可写为

$$\left.\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x}_E(t) + \vec{\xi} - \frac{\vec{v}_E(\vec{v}_E\cdot\vec{\xi})}{2c^2} - \frac{m}{r_E}\vec{\xi} - \vec{F}\times\vec{\xi} \\ t &= \int^{\tau}\left(1+\frac{m}{r_E}+\frac{1}{2}\ \frac{v_E^2}{c^2}\right)d\tau + \frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{v}_E)}{c^2} \end{aligned}\right\} \tag{8.89}$$

其中$\vec{F}$满足

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{\Omega}_G \tag{8.90}$$

第六节　国际原子时TAI

在介绍TAI的相对论定义前，首先对原时和坐标时的概念作进一步的阐明。

在平直时空的情况，采用闵可夫斯基坐标$(t,\ x^i)$和(7.52)式的度规，即

$$dS^2 = -c^2dt^2 + dx^idx^i \tag{8.91}$$

设一个标准钟在该坐标系内作匀速直线运动，与标准钟固连的惯性系中的坐标记为$(\tau、\xi^i)$，度规为

$$dS^2 = -c^2d\tau^2 + d\xi^id\xi^i \tag{8.92}$$

该标准钟在$(\tau,\ \xi^i)$系中为静止，故$d\xi^i = 0$，而在$(t,\ x^i)$系中速度为v^i，故$dx^i = v^idt$。对标准钟来说，有

$$dS^2 = -c^2d\tau^2 = -c^2(1-v^2/c^2)dt^2 \tag{8.93}$$

式中dS的几何意义是钟的类时世界线上的弧长间隔，它是坐标变换的不变量。于是τ也是坐标变换的不变量。τ的意义可以描述为：钟的类时世界线上的弧长，或与钟保持相对静止的惯性系里的时间。显然τ和t有很大区别，习惯上称τ为原时，t为坐标时。由(8.93)式可得两者速率的关系为

$$d\tau = \sqrt{1-v^2/c^2}\,dt \tag{8.94}$$

显然原时比坐标时走得慢，实际上，上式就是时间膨胀现象(7.5)式。当钟不是匀速直线运动时上面的描述仍正确，因为在每一瞬间(8.94)式都成立。

一个理想的标准钟的钟面所指示的时间也与坐标系的选择无关，钟面时就是钟的原时。这样就给出了对原时的第三种描述，钟面指示的时间。这种描述带有实测性的含意而不是仅

念性的。这里假定这个钟没有走时误差。

在广义相对论里情况类似。设在坐标系（t，x^i）里，度规为

$$dS^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0i}dtdx^i + g_{ij}dx^idx^j \tag{8.95}$$

根据等效原理在所讨论的那一瞬间在钟处有一局部惯性系存在，设钟在其中的坐标为(τ,ξ^i)，则有

$$dS^2 = -c^2d\tau^2 = (g_{00} + 2g_{0i}v^i + g_{ij}v^iv^j)dt^2 \tag{8.96}$$

其中v^i为钟在坐标系(t，x^i)中那一瞬间的速度。显然原时τ仍可用前面三种定义来描述。

任何一个观测者或一个大小可以忽略的天体在4维时空中的全部历史是它的类时世界线。虽然观测者或天体本身没有一个钟面，但可以让他们携带一个理想标准钟并与其保持相对静止，这样该世界线的弧长就可以通过标准钟的钟面以时间的形式显示。

归纳起来，原时和坐标时的差别为：

（1）原时与坐标系的选择无关，而坐标时依赖于所选择的坐标系。

（2）原时有明确的物理意义和几何对应，坐标时一般没有明显的意义。

（3）原时可以直接测量，坐标时一般不能直接测量。

（4）一个物体的原时只在该物体的类时世界线上才有定义，所以原时是时空中的局部量。坐标时是全局量，它在坐标系所复盖的时空区内都有定义。

（5）不同物体的原时因定义域不同而无从直接进行比较，必须通过一个有全局定义的量如坐标时作为中介物才能进行比较。

1980年秒定义咨询委员会(CCDS)给出TAI的相对论定义：TAI是地心参考系里的坐标时间尺度，以在旋转的大地水准面上的SI秒为单位。1982年国际无线电咨询委员会(CCIR)采纳了CCDS的定义。

上述定义清晰地阐明了TAI是坐标时而不是原时。虽然构成TAI的各个原子钟的读数是该钟的原时，但要把这些钟进行比对而综合出TAI，只有以某种坐标时作为中介。此外，TAI作为在地面附近处处适用的一个时间尺度，它只能是一个坐标时。

TAI定义中明确标明，它是地心系里的坐标时。坐标时依赖于坐标系的选择，或者说依赖于度规。但定义中却没有指明TAI所居坐标系的度规，因此这样的定义是不够完整和严格的。1991年IAU第21届大会上通过的关于参考系的决议里，规定地心系度规的近似形式为

$$dS^2 = c^2\left(-1 + \frac{2U}{c^2}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)d\vec{x}^2 \tag{8.97}$$

其中U为地球的牛顿引力势和太阳等外部天体的起潮力势之和。在讨论地面附近的TAI的建立时，可忽略外部天体的起潮力势，也就是说U就是地球引力势$U_\oplus$。可以求得地球引力势$U_\oplus$的近似形式为

$$U_\oplus = \frac{GM_\oplus}{r}\left[1 - \left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 J_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\phi\right)\right] \tag{8.98}$$

其中 $M_\oplus$ 和 $R_\oplus$ 分别为地球的质量和赤道半径，r 和 ϕ 为所涉及地点的地心距和纬度，$J_2 = 1.083 \times 10^{-3}$ 为与地球扁率有关的常数。若忽略J_2项，则(8.97)和(8.98)式就是以地球为引力源的施瓦西各向同性度规(7.77)式。

地面上的原子钟和地球一起在自转，设采用赤道坐标系，地球自转角速度为$\vec{\omega}$，通常令与

地球一起转动的地心参考系(GRS⁺)和不转动的地心参考系(GRS)有相同的坐标时，记$(T, \vec{X})$为GRS⁺中的时空坐标，则有

$$\left.\begin{aligned} dt &= dT \\ d\vec{x} &= d\vec{X} + (\vec{\omega} \times \vec{X})dT \end{aligned}\right\} \tag{8.99}$$

度规(8.97)式在GRS⁺中的形式为

$$dS^2 = -c^2\left(1 - \frac{2U_\oplus}{c^2} - \frac{\omega^2(X^2+Y^2)}{c^2}\right)dT^2$$

$$+ 2(\vec{\omega} \times \vec{X})\cdot d\vec{X}dT + \left(1 + \frac{2U_\oplus}{c^2}\right)d\vec{X}^2 \tag{8.100}$$

上式右端第一项中的$U_\oplus + \frac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2)$正是引力势和惯性离心力势之和，即重力势$W_\oplus$。时空交叉项系数在轨道问题中构成科里奥利力，这一系数不为零是旋转坐标系的特点。

下面讨论度规(8.97)和(8.100)式中的时间坐标是否就是TAI。按CCDS的定义，TAI以在旋转的大地水准面上的SI秒为单位。实现SI秒的原子钟称为SI钟或标准钟。所有的SI钟有相同的结构。如果将它们放在同一地点并保持相对静止，只要零点一旦对准，它们将始终指示相同的时刻。这些钟的原时有各自的定义域，原则上不能直接对比，但可以通过坐标时作为中介来实现比对。假设这些钟在给定的坐标系中保持静止，从度规(8.95)式可得一个钟的原时和坐标时间的速率关系为

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}(x^i)}\,dt \tag{8.101}$$

这里假定度规是静态的，即度规系数与时间无关。(8.101)式表明，不同地点的SI钟的速率不同，尽管它们都以SI秒为单位。如果用GRS的度规(8.97)式，就会发现引力越强的地方钟走得越慢，这是第一节里引力红移现象的另一种阐述方式。

如果对某一地点x^i，有$-g_{00}(x^i) = 1$，则该处的SI钟与坐标钟将有相同的速率。通常把这一现象说成该坐标时以x^i处的SI秒为单位。凡在本书中提到钟都应被认为是SI钟，提到原时都应以SI秒为单位，这也与IAU的决议相符。

由(8.97)和(8.98)式可见，(8.97)式中的坐标时t是以无穷远处的SI秒为单位，这与CCDS关于TAI的定义不符。由(8.100)式可见，对于在地面上保持静止的原子钟，只要它们所在地点的重力势$W_\oplus$相同，就有相同的速率。$W_\oplus$的值为常数的曲面称为水准面。第二章第三节里已介绍了大地水准面的定义，实际上它是地球的平均海平面的一种延伸。在大地水准面上不同地点的SI钟有相同的钟速。按最新的测定，大地水准面上的重力势值为

$$W_\oplus^{Geoid} = (62636856.5 \pm 3.0)\text{米}^2/\text{秒}^2 \tag{8.102}$$

该大地水准面也称为旋转的大地水准面，因为重力势里包含了惯性离心力势。

CCDS的定义表明，作为地心坐标时的TAI，在旋转的大地水准面上其速率与SI钟的原时速率相同。因此TAI和(8.100)式中的T之间存在下列变换

$$dT = (1 + L_G)d(TAI) \tag{8.103}$$

其中

$$L_G = W_{\oplus}^{geoid}/c^2 = 6.96929019 \times 10^{-10} \qquad (8.104)$$

由(8.100)式可见，对地面上一个静止的标准钟，有

$$dS^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2(1+L_G)^2\left(1-\frac{2W_{\oplus}}{c^2}\right)d(\mathrm{TAI})^2 \qquad (8.105)$$

即

$$d\tau = \left[1 - \frac{W_{\oplus} - W_{\oplus}^{geoid}}{c^2}\right]d(\mathrm{TAI}) \qquad (8.106)$$

考虑到钟都在大地水准面附近，将重力势$W_{\oplus}$在大地水准面处展开，仅取到一次项，有

$$W_{\oplus} - W_{\oplus}^{geoid} = -g(\phi)h \qquad (8.107)$$

其中h为钟所在地的海拔高度，$g(\phi)$为大地水准面上纬度φ处的重力加速度，有

$$g(\phi) = (9.78027 + 0.05192\sin^2\phi)\text{厘米/秒}^2 \qquad (8.108)$$

在建立TAI的过程中需要进行钟的比对，这是一项经常性的工作。TAI是由分布在世界各地的一些高精度铯钟频率标准的读数综合处理后得到的。必须进行对钟以测出每个钟的原时时刻与坐标时TAI时刻之差。此外，天文观测也需要对钟，观测记录的时刻应是TAI或是协调世界时UTC，观测者必须经常对钟以知道自己的钟面时与TAI或UTC时刻之差。

对钟的方式很多，例如接收时间发播台的无线电信号就是常用的方法。在涉及距离遥远的钟的比对时，通常采用如搬钟和人造卫星的方式。

设将测站A的钟搬到测站B以与那里的钟进行比对。不考虑钟的走时误差，两站的原时τ_A和τ_B可以从钟面读数得到。若在τ_A^0时将钟搬离测站A，τ_A^0对应的TAI时刻t_A^0为已知，在τ_A^1时钟搬到了测站B，如果能算出搬钟所经历的TAI间隔，就可以求得到达时的TAI时刻t_A^1，那时测站B的钟的读数为τ_B^1，因此求得了在测站B的原时和坐标时的关系。

TAI间隔Δt可对度规(8.100)式进行积分求得。若搬钟时，钟相对地面的速度$\vec{v}$是一阶小量，则准到后牛顿近似有

$$d\tau^2 = (1+2gh/c^2)dt^2 - 2(\vec{\omega}\times\vec{X})\cdot\vec{v}/c^2dt^2 - v^2/c^2dt^2 \qquad (8.109)$$

其中t表示TAI。由上式可得

$$t_A^1 - t_A^0 = \int_{\tau_A^0}^{\tau_A^1}\left[1 - \frac{gh}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{(\vec{\omega}\times\vec{X})\cdot\vec{v}}{c^2}\right]d\tau \qquad (8.110)$$

其中等式右端最后一项为

$$\frac{1}{c^2}\int(\vec{\omega}\times\vec{X})\cdot\vec{v}d\tau = \frac{1}{c^2}\int(\vec{X}\times d\vec{X})\cdot\vec{\omega} = \frac{2\omega S}{c^2} \qquad (8.111)$$

S是钟的地心矢径扫过的面积在赤道面上的投影，以向东为正。于是

$$\Delta t = \Delta\tau + \frac{2\omega\Delta S}{c^2} + \frac{1}{c^2}\int_{\tau^0}^{\tau^1}\left(\frac{1}{2}v^2 - gh\right)d\tau \qquad (8.112)$$

其中ΔS项称为塞格内克(Sagnac)效应。利用飞机搬钟的对时精度可达0.1微秒。

利用人造卫星来对钟的原理可简述如下。若卫星钟原时为τ_s，则它对应的坐标时t可以从

度规求出。由GRS里的度规(8.97)式可得

$$d\tau_s = \left[1 + L_G - \frac{1}{c^2}\left(\frac{GM_{\oplus}}{r_s} + \frac{1}{2}v_s^2\right)\right]dt$$

其中r_s和v_s是卫星的地心距和速度，J_2项没有列出，实际应用时应予以考虑。进行积分，不难得到

$$\tau_s = \left(1 + L_G - \frac{3}{2}\frac{GM_{\oplus}}{c^2a}\right)t - \frac{2}{c^2}\frac{GM_{\oplus}e}{na}\sin E + c_s$$

其中a、e、n和E分别为卫星轨道的半长径，偏心率，平均角速度和偏近点角，可由卫星钟与中心站的钟比对后求得。

由(8.106)式知，地面站钟的原时τ与坐标时t的关系为

$$\tau = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)t + c$$

卫星经过测站上空时发来的信号中包含卫星的轨道要素，发射时刻τ_s、积分常数，信号的传播时间Δt可根据卫星和测站的位置用第八章第三节里的公式算出，知道信号到达时的坐标时并根据记录下的时刻τ而决定积分常数c。利用人造卫星对时精度约为0.9微秒。

1982年末起国际上开始利用GPS卫星进行对钟。GPS卫星上安装了铯钟，除单站与卫星钟对钟外，也可由两个测站同时接收卫星发来的脉冲以测出两站钟差，两站精密时间同步可达20ns。

第七节 天文时间尺度

TAI不是IAU定义的时间尺度。IAU在1976和1979年的第16、17届大会上定义了新的时间尺度，它们分别为质心力学时（TDB）和地球力学时（TDT），在第一章里我们已对它们作了简单介绍。然而不断有人对这两个时间尺度提出异议，在IAU第21届大会上又定义了两个新的时间尺度：质心坐标时（TCB）和地心坐标时（TCG），并决议把地球力学时改名为地球时（TT）。因此现在实际上存在4个天文时间尺度，2个属于太阳系质心参考系：TCB和TDB，2个属于地心参考系：TCG和TT，都是在广义相对论框架里定义的。IAU的决议中没有具体规定在太阳系质心参考系（BRS）和地心参考系（GRS）里应采用哪一个天文时间尺度，从而引起了使用上的混乱。本节将讨论这些时间尺度的准确定义及其各自的用途。

如第八章第六节所述，TAI是用原子时标实现的一种地心坐标时间尺度。在天体历表的编算中曾采用历书时（ET），ET由于其本身的缺点，很快被舍弃不用。为了历表的连续性，需要有一个天文时间尺度来继承ET，TAI不能用来继承ET，于是用TDT（改称为TT）来代替ET作为历表的时间变量。因此有

$$\mathrm{TT} = \mathrm{TAI} + 32^s.184$$

应当强调，登载太阳系天体在太阳系质心坐标系位置的历表为质心系动力

度规求出。由GRS里的度规(8.97)式可得

$$d\tau_s = [1 + L_G - \frac{1}{c^2}(\frac{GM_\oplus}{r_s} + \frac{1}{2}v_s^2)]dt \tag{8.113}$$

其中r_s和v_s是卫星的地心距和速度，J_2项没有列出，实际应用时应予以考虑。对(8.113)式进行积分，不难得到

$$\tau_s = (1 + L_G - \frac{3}{2}\frac{GM_\oplus}{c^2 a})t - \frac{2}{c^2}\frac{GM_\oplus e}{na}\sin E + c_s \tag{8.114}$$

其中a、e、n和E分别为卫星轨道的半长径，偏心率，平均角速度和偏近点角，c_s为积分常数，可由卫星钟与中心站的钟比对后求得。

由(8.106)式知，地面站钟的原时τ与坐标时t的关系为

$$\tau = (1 + \frac{gh}{c^2})t + c \tag{8.115}$$

卫星经过测站上空时发来的信号中包含卫星的轨道要素，发射时刻τ_s、积分常数c_s等信息。信号的传播时间Δt可根据卫星和测站的位置用第八章第三节里的公式算出。于是测站可以知道信号到达时的坐标时并根据记录下的时刻τ而决定积分常数c。利用人造卫星对钟的现代定时精度约为0.9微秒。

1982年末起国际上开始利用GPS卫星进行对钟。GPS卫星上安装了铯或原子频标。除了单站与卫星钟对钟外，也可由两个测站同时接收卫星发来的脉冲以测出两站的钟差。据估计，两站精密时间同步可达20ns。

第七节　天文时间尺度

TAI不是IAU定义的时间尺度。IAU在1976和1979年的第16、17届大会上引入了两个新的时间尺度，它们分别为质心力学时（TDB）和地球力学时（TDT）。在第一章第五节里我们已对它们作了简单介绍。然而不断有人对这两个时间尺度提出异议。1991年召开的IAU第21届大会上又定义了两个新的时间尺度：质心坐标时（TCB）和地心坐标时(TCG)，并决议把地球力学时改名为地球时（TT）。因此现在实际上存在4个天文时间尺度，2个属于太阳系质心参考系：TCB和TDB，2个属于地心参考系：TCG和TT。它们都是在相对论框架里定义的。IAU的决议中没有具体规定在太阳系质心参考系（BRS）和地心参考系（GRS）里应采用哪一个天文时间尺度，从而引起了使用上的混乱。本节将介绍这四个天文时间尺度的准确定义及其各自的用途。

如第八章第六节所述，TAI是用原子时标实现的一种地心坐标时间尺度。1984年前天文历表的编算中曾采用历书时（ET），ET由于其本身的缺点，很快被舍弃不用，但为了保持历表的连续性，需要有一个天文时间尺度来继承ET，TAI不能用来继承ET，为此引入TDT（现改称为TT）来代替ET作为历表的时间度量。因此有

$$TT = TAI + 32^s.184 \tag{8.116}$$

应当强调，登载太阳系天体在太阳系质心坐标系位置的历表为质心系动力学历表，显然它的

时间度量不是TT，因为TAI是地心系坐标时间尺度，而地心系与太阳系质心系有不同的坐标时。为了作出观测预报，需要编制视地心历表，刊载地心处观测到的天象，因此IAU定义了TT，它是视地心历表的时间变量。如果需要的话，人造卫星运动方程的自变量也可以是TT。

IAU把TT看为是一个理想的坐标时间尺度，而TAI则是国际计量局用原子频标实现的具体的时间尺度，显然TAI有误差，在1977至1990年期间约在$\pm 10\mu s$之内，于是(8.116)式应改写成

$$TT(TAI)=TAI+32^s.184 \tag{8.117}$$

其中TT(TAI)表示用TAI实现的TT时间尺度。通常TAI的误差可以忽略，认为(8.116)式严格成立。

(8.103)式表明，TT不是IAU的地心系度规(8.97)式中的时间变量t，两者之间有一个常数比例因子$1+L_G$。(8.97)式中的时间坐标t被IAU定义为TCG。IAU规定。TAI时刻1977年1月1日零时是TCG时刻1977年1月1日$0^h0^m32^s.184$。因此TCG和TT间的关系为

$$TCG-TT=L_G\times(JD-2443144.5)\times 86400 \tag{8.118}$$

其中2443144.5是1977年1月1日0^h的儒略日。由(8.118)式可看出，TCG和TT的时间存在随时间累积的偏差。如前面所述，TT和TAI一样，在旋转的大地水准面上它的秒长与那里的SI秒相同。在忽略外部潮汐势的情况下，TCG的秒长则和距地心无穷远处的SI秒相同。显然TCG的定义更符合广义相对论的框架，即在无穷远处时空为平直的，那时的度规为闵可夫斯基度规。TCG可用作绕地球的天体运动方程的自变量。

IAU第21届大会上规定太阳系质心参考系里的度规的近似形式也是(8.97)式，即

$$dS^2=c^2\left(-1+\frac{2U}{c^2}\right)dt^2+\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)d\vec{x}^2 \tag{8.119}$$

其中U是太阳系内各天体的引力势之和。太阳系外的恒星世界引起的潮汐势可以忽略。若不考虑各天体的形状，有

$$U=\sum_A\frac{GM_A}{r_A} \tag{8.120}$$

其中M_A和r_A分别为第A个天体的质量以及它到所涉及的场点间的欧氏距离，即$r_A=|\vec{x}_A-\vec{x}|$，对太阳系的主要天体求和。

(8.119)式中的坐标时间尺度t定义为TCB，在距太阳系质心无穷远处，TCB秒长等于那里的SI秒。

(8.78)式给出日心系和地心系间的坐标变换，因此TCB和TCG之间的关系可用(8.78)式第二式表示。采用本节的符号，即用TCG代替τ，TCB代射t，于是有

$$TCB-TCG=c^{-2}\left[\int_{t_0}^{t}\left(\frac{v_E^2}{2}+\frac{GM_S}{r_E}\right)dt+\vec{v}_E\cdot(\vec{x}-\vec{x}_E)\right] \tag{8.121}$$

其中M_s是太阳的质量，t可以认为是TCB或TCG，引起的误差为高阶小量。

如果将地球的轨道近似认为是太阳吸引下的开普勒椭圆，利用二体问题公式可以求得(8.121)式中积分项的分析表达式

为TAI是地心系坐标时间尺度，而地心系与太阳系质心系有不同的坐标
，需要编制视地心历表，刊载地心处观测到的天象，因此IAU定义了
时间变量。如果需要的话，人造卫星运动方程的自变量也可以是TT。
一个理想的坐标时间尺度，而TAI则是国际计量局用原子频标实现的
TAI有误差，在1977至1990年期间约在±10μs之内，于是(8.116)式

$$\mathrm{TAI)} = \mathrm{TAI} + 32^s.184 \qquad (8.117)$$

用TAI实现的TT时间尺度。通常TAI的误差可以忽略，认为(8.116)

TT不是IAU的地心系度规(8.97)式中的时间变量t，两者之间有一个
(8.97)式中的时间坐标t被IAU定义为TCG。IAU规定，TAI时刻
TCG时刻1977年1月1日$0^h0^m32^s.184$。因此TCG和TT间的关系为

$$\mathrm{G - TT} = L_G \times (\mathrm{JD} - 2443144.5) \times 86400 \qquad (8.118)$$

年1月1日0^h的儒略日。由(8.118)式可看出，TCG和TT的时间存在
前面所述，TT和TAI一样，在旋转的大地水准面上它的秒长与那里
部潮汐势的情况下，TCG的秒长则和距地心无穷远处的SI秒相同。显
义相对论的框架，即在无穷远处时空为平直的，那时的度规为闵可夫
绕地球的天体运动方程的自变量。
规定太阳系质心参考系里的度规的近似形式也是(8.97)式，即

$$= c^2\left(-1 + \frac{2U}{c^2}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)d\vec{x}^2 \qquad (8.119)$$

体的引力势之和。太阳系外的恒星世界引起的潮汐势可以忽略。若不

$$\Sigma \frac{GM_A}{r_A} \qquad (8.120)$$

天体的质量以及它到所涉及的场点间的欧氏距离，即$r_A = |\vec{x}_A - \vec{x}|$，
。
时间尺度t定义为TCB，在距太阳系质心无穷远处，TCB秒长等于

和地心系间的坐标变换，因此TCB和TCG之间的关系可用(8.78)
的符号，即用TCG代替τ，TCB代替t，于是有

$$\mathrm{TCG} = c^{-2}\left[\int_{t_0}^{t}\left(\frac{v_E^2}{2} + \frac{GM_S}{r_E}\right)dt + \vec{v}_E\cdot(\vec{x} - \vec{x}_E)\right] \qquad (8.121)$$

可以认为是TCB或TCG，引起的误差为高阶小量。
以认为是太阳吸引下的开普勒椭圆，利用二体问题公式可以求得
表达式

$$c^{-2}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{v_E^2}{2} + \frac{GM_S}{r_E}\right)dt = \frac{3GM_S}{2a_E}(t - t_0)$$

$$+ \frac{2GM_S}{a_E n_E} e_E \sin[n_E(t - t_0)] + \cdots \qquad (8.122)$$

其中a_E、e_E和n_E分别为地球轨道半长径、偏心率和平均角速度。上式只列出到e_E的一次幂项。严格的计算应当考虑各大行星和月球对地球轨道的摄动，同时在(8.121)式中还应考虑除太阳的引力势外的各大行星和月球的引力势。此外在推导(8.78)式时，采用的是施瓦西度规，这是一个简化的太阳系模型。

将(8.122)式代入(8.121)式，最后得

$$\mathrm{TCB - TCG} = L_C \times (\mathrm{JD} - 2443144.5) \times 86400$$

$$+ c^{-2}\vec{v}_E\cdot(\vec{x} - \vec{x}_E) + P \qquad (8.123)$$

其中

$$L_C = \frac{3GM_S}{2c^2 a_E} + \cdots = 1.480826847 \times 10^{-8} \qquad (8.124)$$

L_C为长期项系数，P是周期项，其中最主要的周期项由太阳引起，振幅约为1657μs。附录4给出了周期项P的解析表达式。等号右端第二项的值依赖于事件发生地点的地心坐标。若在地心，则该项的值为零。对于地面上静止的观测者，该项是以日为周期的周期项，最大振幅约为2.1μs。

(8.123)式表明，TCB和TCG的时刻之差有周期变化也有长期项。容易估计，到本世纪末因子为L_C的项将造成两者的时刻差约为11秒。由(8.118)和(8.123)式知，由于L_G比L_C小一个量级还多，因而TCB和作为视地心历表时间变量TT间也存在长期变化。如果在编制质心系动力学历表时用TCB作为时间变量，则该历表的时间变量和视地心历表时间变量TT间将出现长期漂移。为此，引入了一个新的天文时间尺度TDB，它和TT间没有长期漂移只有周期变化，即

$$\mathrm{TDB - TT} = c^{-2}\vec{v}_E\cdot(\vec{x} - \vec{x}_E) + P \qquad (8.125)$$

由(8.118)，(8.123)和(8.125)式得

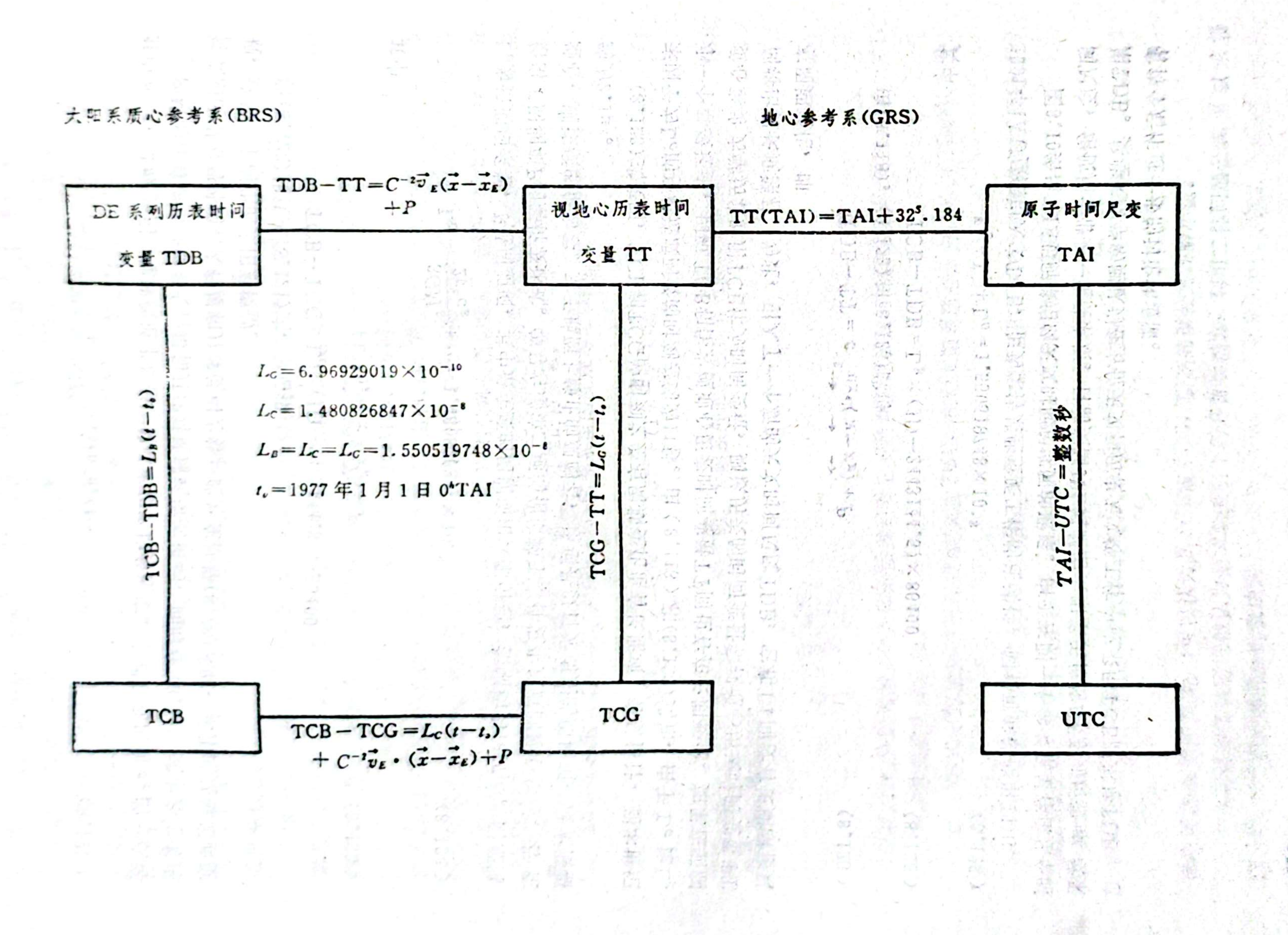
$$\mathrm{TCB - TDB} = L_B \times (\mathrm{JD} - 2443144.5) \times 86400 \qquad (8.126)$$

其中

$$L_B = L_C + L_G = 1.550519748 \times 10^{-8} \qquad (8.127)$$

1991年IAU虽然引入了TCB，但为保持某些重要工作的连续性，同意可继续使用TDB。

图8.10给出了IAU所采用的天文时间尺度间的联系。由于在同一个参考系里存在几个时间尺度，给使用者带来一定的麻烦。目前美国JPL编制的太阳系天体的DE系列历表继续采用TDB。某些天文学家则认为在方位天文和历表天文等工作中应采用TCB而不是TDB。这有待今后作进一步的讨论和澄清。



太阳系质心参考系(BRS)
地心参考系(GRS)
DE 系列历表时间
变量 TDB
视地心历表时间
变量 TT
原子时间尺度
TAI
TCB
TCG
UTC
$TDB-TT=C^{-2}\vec{v}_E(\vec{x}-\vec{x}_E)+P$
$TT(TAI)=TAI+32^s.184$
$TCB-TDB=L_B(t-t_0)$
$TCG-TT=L_G(t-t_0)$
$TAI-UTC=$整数秒
$TCB-TCG=L_C(t-t_0)+C^{-2}\vec{v}_E\cdot(\vec{x}-\vec{x}_E)+P$
$L_G=6.96929019\times10^{-10}$
$L_C=1.480826847\times10^{-8}$
$L_B=L_C=L_G=1.550519748\times10^{-8}$
$t_0=1977$ 年 1 月 1 日 0^hTAI

第八节　恒星和行星视位置的精确归算

第六章里已经描述了恒星和行星的视位置归算，本节将在相对论框架里重新讨论这一问题。所有必要的公式和概念已在前面给出。

从星表历元t_0时的恒星平位置归算到观测历元t时的地心视位置的步骤如下：

（1）作星表历元t_0到观测历元t之间的岁差和自行改正，将恒星在t_0时的平位置$\vec{S}_0$换算到t时的平位置$\vec{S}_m$。

（2）作章动改正，将$\vec{S}_m$换算到t时太阳系质心坐标方向$\vec{S}_B$（真位置）。

（3）作周年视差改正，将$\vec{S}_B$换算到t时地心坐标方向$\vec{S}_G$。

（4）作光线弯曲改正，将$\vec{S}_G$换算到t时地心自然方向$\vec{S}_N$。

（5）作周年光行差改正，将$\vec{S}_N$换算到t时地心本征方向$\vec{S}_P$（视位置）。这里把t时恒星的地心本征方向认为是t时的地心视位置。

从地心视位置到星表历元的平位置的归算只要把上述步骤反过来就行了。

就目前的观测精度而言，步骤（1）和（2）与经典的计算没有什么不同。恒星的距离十分遥远，就方位的变化而言，从质心系到地心系的坐标变换仍可以认为是简单的坐标原点平移，即步骤（3）中周年视差的公式仍可采用(3.52)式。

光线弯曲的改正公式可使用(8.40)式，于是有

$$\vec{S}_N=\vec{S}_G-\frac{2GM_\odot}{c^2R(R+\vec{R}\cdot\vec{S}_G)}\vec{S}_G\times(\vec{S}_G\times\vec{R}) \tag{8.128}$$

其中G和$M_\odot$分别为万有引力常数和太阳的质量，$\vec{R}$和R是地心的日心位置矢量及地心的日心距离。

周年光行差的改正公式可使用(7.27)式，有

$$\vec{S}_P=\vec{S}_N-\frac{v}{c}\vec{S}_N\times(\vec{S}_N\times\vec{n})+\frac{v^2}{2c^2}\left\{[2(\vec{S}_N\cdot\vec{n})^2-1]\vec{S}_N-(\vec{S}_N\cdot\vec{n})\vec{n}\right\} \tag{8.129}$$

其中v和$\vec{n}$是地心在太阳系质心里的速度矢量$\vec{V}$的大小和方向单位矢量。严格说$\vec{V}$应该是自然基里观测到的地心速度。但它和通常意义下地心速度的差别仅为c^{-2}量级，可以忽略不计。

将步骤(3)—(5)综合起来，得真位置$\vec{S}_B$和视位置$\vec{S}_P$间的换算公式

$$\vec{S}_P=\vec{S}_B+\left[\pi-\frac{2GM_\odot}{c^2R(R+\vec{R}\cdot\vec{S})}\right]\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{R})-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\vec{S}\cdot\vec{V}}{c}\right)\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{V})+\frac{1}{2c^2}\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{S}) \tag{8.130}$$

其中π为恒星的周年视差，$\vec{S}$可采用$\vec{S}_P$或$\vec{S}_B$取代，$\vec{R}$和$\vec{V}$可看成是地心在太阳系质心系或日

心系中的位置和速度矢量，这些差异引起的误差都可忽略。（8，130）式是目前天文历表编算中采用的公式。

天文观测的时间记录通常使用UTC，这里涉及地心视位置，按IAU规定它应对应于TT，亦即观测历元t应对应于TT。星表历元t_0是太阳系质心时，应对应于TCB或TDB。因此在恒星的视位置归算中应有时间的转换。若不考虑时间的转换，当从$\vec{S}_0$归算到$\vec{S}_P$时观测历元t会有误差，当从$\vec{S}_P$归算到$\vec{S}_0$时，岁差改正的历元间隔会有误差，但这些误差的影响非常小以致可以被忽略。

对太阳系内的天体，视位置的归算要稍复杂一些。周年视差，光线弯曲和光行差处理都有所不同。引入相对论后，行星光行差不再是一个准确和有用的概念，由地球速度引起的周年光行差仍是本征方向$\vec{S}_P$和自然方向$\vec{S}_N$之差。行星运动效应将用光行时改正来进行处理，即时刻t观测到的是$t-\tau$时的行星辐射来的光，其中τ为光行时。

通常已知在历元t_0的平赤道坐标系的行星历表，即行星在太阳系质心系里的一系列4维坐标(T，$\vec{r}$)，计算该行星在观测历元t时的地心视位置$\vec{S}_P$。目前国际上采用的行星和月球历表是JPL编制的DE系列历表，它的时间变量采用TDB，t_0为2000.0TDB。观测历元t应对应于地心处的TT。

行星视位置归算的主要步骤如下：

(1)将在TT中量度的观测历元t转换成对应的在TDB中量度的T

利用(8.125)式，并考虑到事件发生在地心可得

$$T = t + P \tag{8.131}$$

(2)迭代计算光行时τ

从行星历表可得T时的行星位置$\vec{r}(T)$和地心位置$\vec{R}=\vec{R}(T)$，由此可计算τ的近似值

$$\tau = |\vec{r}(T) - \vec{R}|/c \tag{8.132}$$

然后从行星历表可得$T-\tau$时行星位置$\vec{r}(T-\tau)$，由此可计算τ的改进值

$$\tau = |\vec{r}(T-\tau) - \vec{R}|/c \tag{8.133}$$

这一过程可反复进行以达到所要求的精度。在最后一次迭代时可计入引力时延(8.52)式。

(3)计算$T-\tau$时行星相对T时地心的坐标方向$\vec{S}$

利用(8.22)式，得

$$\vec{\rho} = \rho\vec{S} = \vec{r}(T-\tau) - \vec{R}(T) \tag{8.134}$$

其中$\vec{S}$为欧氏意义下的单位矢量。

(4)计算T时的地心自然方向$\vec{S}_N$

利用(8.24)和(8.39)式进行光线弯曲改正，有

$$\vec{S}_N = \vec{S} + \frac{2GM_\odot}{c^2[R^2-(\vec{R}\cdot\vec{S})^2]}\left(\frac{\vec{R}\cdot\vec{S}}{R} + \frac{R-r}{\rho}\right)\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{R}) \tag{8.135}$$

其中r是$T-\tau$时行星到太阳系质心的距离。注意虽然(8.135)式给出的是T时的自然方向，但对应的坐标系仍是基本历元t_0时的平赤道坐标系。

差异引起的误差都可忽略。(8.130)式是目前天文历表编算

用UTC，这里涉及地心视位置，按IAU规定它应对应于TT，
表历元t_0是太阳系质心时，应对应于TCB或TDB。因此在
的转换。若不考虑时间的转换，当从$\vec{S}_0$归算到$\vec{S}_P$时观测历元t
，岁差改正的历元间隔会有误差，但这些误差的影响非常小

的归算要稍复杂一些。周年视差，光线弯曲和光行差处理都
光行差不再是一个准确和有用的概念，由地球速度引起的周
方向$\vec{S}_N$之差。行星运动效应将用光行时改正来进行处理，
辐射来的光，其中τ为光行时。
坐标系的行星历表，即行星在太阳系质心系里的一系列4维坐
测历元t时的地心视位置$\vec{S}_P$。目前国际上采用的行星和月球
它的时间变量采用TDB，t_0为2000.0TDB。观测历元t应对

如下：
元t转换成对应的在TDB中量度的T
事件发生在地心可得

(8.131)

位置$\vec{r}(T)$和地心位置$\vec{R}=\vec{R}(T)$，由此可计算τ的近似值

$$-\vec{R}\,|/c \qquad (8.132)$$

位置$\vec{r}(T-\tau)$，由此可计算τ的改进值

$$)-\vec{R}\,|/c \qquad (8.133)$$

求的精度。在最后一次迭代时可计入引力时延(8.52)式。
时地心的坐标方向$\vec{S}$

$$-\tau)-\vec{R}(T) \qquad (8.134)$$

。
向$\vec{S}_N$
光线弯曲改正，有

$$\frac{2GM_\odot}{R^2-(\vec{R}\cdot\vec{S})^2]}\left(\frac{\vec{R}\cdot\vec{S}}{R}+\frac{R-r}{\rho}\right)\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{R}) \qquad (8.135)$$

心的距离。注意虽然(8.135)式给出的是T时的自然方向，但
的平赤道坐标系。

(5)计算T时的地心本征方向$\vec{S}_P$
利用(7.27)式进行周年光行差改正

$$\vec{S}_P=\vec{S}_N-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\vec{S}\cdot\vec{V}}{c}\right)\vec{S}\times(\vec{S}\times\vec{V})$$

$$+\frac{1}{2c^2}\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{S}) \qquad (8.136)$$

其中$\vec{V}$是地心的速度矢量，可从行星历表中得到。由于坐标系仍是基本历元t_0时的平赤道坐标系，因此不能将$\vec{S}_P$称为视位置。

(6)作$T-t_0$的岁差改正和T时章动改正，将t_0时的平赤道坐标系变换到T时真赤道坐标，从而得到了在观测历元t时的地心视位置。

行星视位置归算的反方向问题要困难得多，这要从行星的方位观测资料去求得行星的动力学历表，这是一个轨道计算和轨道改进的课题，属天体力学的范畴，不在这里介绍。

第八章　习　　题

1.在与观测者固连的参考系K里推导径向多普勒频移公式(8.4)式。

2.频移公式（8.18）式中的v_r是t_1时的光源相对t_0时的观测者的视向速度。规定公式中出现的v_r只能是光源相对同一时刻观测者的视向速度，重新推导频移公式。

3.推导在施瓦西标准坐标系里光的传播路径及从无穷远到无穷远的光线弯曲公式。

4.若R是太阳在各向同性度规中的坐标半径，D是从坐标距离r处观测到的太阳角直径，试证

$$D=2\sin^{-1}\left[\frac{R}{r}\left(1+\frac{2m}{R}-\frac{2m}{r}\right)\right]$$

5.阐述本征方向，自然方向和坐标方向的定义及其相互关系，并指出它们是否依赖于坐标系的选择。

6.利用施瓦西各向同性坐标和标准坐标间的关系（7.68）式，证明在施瓦西标准坐标系中，与（8.46）和（8.52）式相应的时延公式为

$$c\Delta t=|\vec{r}-\vec{R}|-m\frac{r+R}{|\vec{r}-\vec{R}|}(1-\vec{u}_r\cdot\vec{u}_R)$$

$$-2m\ln\left(\frac{r+R+|\vec{r}-\vec{R}|}{r+R-|\vec{r}-\vec{R}|}\right)$$

其中$\vec{u}_r$和$\vec{u}_R$分别为$\vec{r}$和$\vec{R}$方向的单位向量。

7.从(8.79)式和(8.67)—(8.69)式证明VLBI的时延公式(8.83)式成立。

8.求出地心的原时和日心坐标时之间的关系式，准到后牛顿近似，假定地球的轨道是椭圆，并展开到偏心率的2次幂。

9.规定事件发生在地心，问TAI时刻2000.0（2000年1月1日12时TAI，对应2451545.0 TAI)对应的TT、TCG、TCB和TDB时刻各为多少？

10. 脉冲星辐射的脉冲周期用自己的原时来量度时十分稳定，在以下的简化模型下讨论位于地心处的观测者观测到脉冲周期怎样随时间而变化。这里只考虑太阳的引力场，脉冲星离太阳系的距离足够远以致其周年视差可以忽略，脉冲星相对太阳的速度为$\vec{V}$。

附录1　岁差量系数（见表4.1）的表达式

常数项：

$x_0=\tan^{-1}(s_1/c_1)$

t的系数：

$\varepsilon_1=c_1$

$\chi_1=s_1\csc\varepsilon_0$

$\psi_1=p_1+\chi_1\cos\varepsilon_0$

$P_0=(p_1+p_e)\sec\varepsilon_0+\chi$.

$z_1-\zeta_1=0$

$z_1+\zeta_1=\psi_1\cos\varepsilon_0-\chi_1$

$\theta_1=\psi_1\sin\varepsilon_0$

$q_1=(s_1^2+c_1^2)^{\frac{1}{2}}$

$y_1=(c_1s_1'-s_1c_1')/q_1^2$

t^2的系数：

$\varepsilon_1'=c_1'-s_1p_1/2$

$\omega_1'=s_1\psi_1/2$

$\psi_1'=c_1\psi_1\cot 2\varepsilon_0+(P_1\cos\varepsilon_0-c_1p_e\tan\varepsilon_0)/2$

$\chi_1'=(s_1'+c_1p_1)\csc\varepsilon_0$

$p_1'=\psi_1'-\chi_1'\cos\varepsilon_0+s_1c_1/2$

$\eta_1'=-s_1c_1/2$

$z_1'-\zeta_1'=(\psi_1'\chi_1-\psi_1\chi_1')/3\psi_1$

$z_1'+\zeta_1'=\psi_1'\cos\varepsilon_0-\chi_1'=z_2=\zeta_2$

$\theta_1'=\psi_1'\sin\varepsilon_0$

$q_1'=(s_1s_1'+c_1c_1')/q_1$

$y_1'=(c_1s_1''-s_1c_1'')/q_1^2-y_1(c_1'+s_1y_1)/c_1$

t^3的系数：

$\varepsilon_1''=c_1''-(2s_1'p_1+s_1p_1')/3-c_1(p_1^2-s_1^2-c_1^2)/6$

$$\omega''_1 = \sin\varepsilon_0\,(2\psi'_1\chi_1 + \psi_1\chi'_1)/3$$

$$3\psi''_1 = (c_1P_1 + \varepsilon'_1P_0)\cos2\varepsilon_0\csc\varepsilon_0 - \psi_1\omega'_1\cot\varepsilon_0$$

$$-\psi_1(4c_1^2 + \chi_1^2)/2 - p_0(3c_1^2 + 2e'_1\cot\varepsilon_0)/2$$

$$\chi''_1 = (s''_1 + c'_1p_1 + c_1p'_1 - s_1\omega'_1\cot\varepsilon_0 - s_1p_1^2/2)\csc\varepsilon_0 + \chi_1^3/6$$

$$p''_1 = \psi''_1 - \chi''_1\cos\varepsilon_0 + \sin\varepsilon_0[(\varepsilon'_1 + \omega'_1)\chi_1 + c_1\chi'_1]/2$$

$$2\eta''_1 = p_1(s_1^2 - c_1^2) - (s_1c'_1 + c_1s'_1)$$

$$z''_1 - \zeta''_1 = (z'_2 - \zeta'_2)/2$$

$$z''_1 + \zeta''_1 = \psi''_1\cos\varepsilon_0 - \chi''_1 + \psi_1^2\sin^2\varepsilon_0(\psi_1\cos\varepsilon_0 - 3\chi_1)/12$$

$$\theta''_1 = \psi''_1\sin\varepsilon_0 + \psi_1\sin\varepsilon_0(3\chi_1^2 + 6\psi_1\chi_1\cos\varepsilon_0 - \psi_1^2\cos^2\varepsilon_0)/24$$

$$q''_1 = (2s_1s''_1 + 2c_1c''_1 + s'^2_1 + c'^2_1 - q'^2_1)/2q_1 + q_1^3/6$$

T的系数：

$$x_1 = 2y_1 + p_1$$

Tt的系数：

$$s_2 = 2s'_1 + c_1p_1$$

$$c_2 = 2c'_1 - s_1p_1$$

$$e_2 = c_2 = 2e'_1$$

$$\psi_2 = -c_1P_0\sin\varepsilon_0 + P_1\cos\varepsilon_0$$

$$\chi_2 = s_2\csc\varepsilon_0 - c_1\chi_1\cot\varepsilon_0$$

$$p_2 = \psi_2 - \chi_2\cos\varepsilon_0 + c_1\chi_1\sin\varepsilon_0 = 2p'_1$$

$$z_2 - \zeta_2 = 0$$

$$z_2 + \zeta_2 = \psi_2\cos\varepsilon_0 - c_1\psi_1\sin\varepsilon_0 - \chi_2 = 2(z'_1 + \zeta'_1)$$

$$\theta_2 = \psi_2\sin\varepsilon_0 + c_1\psi_1\cos\varepsilon_0 = 2\theta'_1$$

$$q_2 = (s_1s_2 + c_1c_2)/q_1 = 2q'_1$$

$$y_2 = 3(c_1s''_1 - s_1c''_1)/q_1^2 - 4y_1(c'_1 + s_1y_1)/c_1$$

T^2t的系数：

$$s_3 = 3s''_1 + 2c'_1p_1 + c_1p'_1 - s_1(p_1^2 - s_1^2 - c_1^2)/2$$

$$c_3 = 3e''_1$$

$$e_3 = c_3 = 3e''_1$$

$$\psi_3 = -\frac{1}{2}c_1^2P_0\cos\varepsilon_0 - e'_1P_0\sin\varepsilon_0 - c_1P_1\sin\varepsilon_0$$

$$\chi_3 = s_3\csc\varepsilon_0 - c_1\chi_2\cot\varepsilon_0 + \chi_1\left(\frac{1}{2}c_1^2 - \varepsilon'_1\cot\varepsilon_0\right)$$

$$p_3 = \psi_3 - \chi_3\cos\varepsilon_0 + c_1\chi_2\sin\varepsilon_0 + e'_1\chi_1\sin\varepsilon_0 + \frac{1}{2}c_1^2\chi_1\cos\varepsilon_0$$

$$z_3 - \zeta_3 = 0$$

$$z_3 + \zeta_3 = \psi_3\cos\varepsilon_0 - c_1\psi_2\sin\varepsilon_0 - \chi_3 - \frac{1}{2}c_1^2\psi_1\cos\varepsilon_0 - \varepsilon'_1\psi_1$$

$$\theta_3 = \psi_3\sin\varepsilon_0 + c_1\psi_2\cos\varepsilon_0 + \varepsilon'_1\psi_1\cos\varepsilon_0 - \frac{1}{2}c_1^2\psi_1\sin\varepsilon_0 =$$

$$q_3 = [s_2^2 + c_2^2 + 2(s_1s_3 + c_1c_3) - q_2^2]/2q_1$$

T^3的系数：

$$x_2 = (c_1s_3 - s_1c_3)/q_1^2 - 2x_1(c'_1 + s_1y_1)/c_1$$

Tt^2的系数：

$$s'_2 = 3s''_1 + c'_1p_1 + s_1(s_1^2 + c_1^2)/2$$

$$c'_2 = 3c''_1 - s'_1p_1 + c_1(s_1^2 + c_1^2)/2$$

$$e'_2 = c'_2 - (s_2p_1 + s_1p_2)/2 = 3\varepsilon''_1$$

$$\omega'_2 = (s_1\psi_2 - s_2\psi_1)/2$$

$$2\psi'_2 = P_0\csc\varepsilon_0[c_2\cos2\varepsilon_0 - c_1^2(\cot\varepsilon_0 + \sin2\varepsilon_0)]$$

$$+ c_1P_1\csc\varepsilon_0(\cos2\varepsilon_0 - \sin^2\varepsilon_0) + p_0\csc\varepsilon_0(c_1^2\csc\varepsilon_0 - c_2$$

$$\chi'_2 = (s'_2 + c_1p_2 + c_2p_1)\csc\varepsilon_0 - c_1\cot\varepsilon_0\csc\varepsilon_0(s'_1 + c_1p_1)$$

$$p'_2 = \psi'_2 + c_1\chi'_1\sin\varepsilon_0 - \chi'_2\cos\varepsilon_0 + (s_2c_1 + c_2s_1)/2$$

$T^2 t$的系数：

$$s_3 = 3s_1'' + 2c_1' p_1 + c_1 p_1' - s_1(p_1^2 - s_1^2 - c_1^2)/2$$

$$c_3 = 3\varepsilon_1''$$

$$\varepsilon_3 = c_3 = 3\varepsilon_1''$$

$$\psi_3 = -\frac{1}{2}c_1^2 P_0 \cos\varepsilon_0 - \varepsilon_1' P_0 \sin\varepsilon_0 - c_1 P_1 \sin\varepsilon_0$$

$$\chi_3 = s_3 \csc\varepsilon_0 - c_1 \chi_2 \cot\varepsilon_0 + \chi_1(\frac{1}{2}c_1^2 - \varepsilon_1' \cot\varepsilon_0)$$

$$p_3 = \psi_3 - \chi_3 \cos\varepsilon_0 + c_1 \chi_2 \sin\varepsilon_0 + \varepsilon_1' \chi_1 \sin\varepsilon_0 + \frac{1}{2}c_1^2 \chi_1 \cos\varepsilon_0$$

$$z_3 - \zeta_3 = 0$$

$$z_3 + \zeta_3 = \psi_3 \cos\varepsilon_0 - c_1 \psi_2 \sin\varepsilon_0 - \chi_3 - \frac{1}{2}c_1^2 \psi_1 \cos\varepsilon_0 - \varepsilon_1' \psi_1 \sin\varepsilon_0$$

$$\theta_3 = \psi_3 \sin\varepsilon_0 + c_1 \psi_2 \cos\varepsilon_0 + \varepsilon_1' \psi_1 \cos\varepsilon_0 - \frac{1}{2}c_1^2 \psi_1 \sin\varepsilon_0 = \theta_2'$$

$$q_3 = [s_2^2 + c_2^2 + 2(s_1 s_3 + c_1 c_3) - q_2^2]/2q_1$$

T^3的系数：

$$x_2 = (c_1 s_3 - s_1 c_3)/q_1^2 - 2x_1(c_1' + s_1 y_1)/c_1$$

Tt^2的系数：

$$s_2' = 3s_1'' + c_1' p_1 + s_1(s_1^2 + c_1^2)/2$$

$$c_2' = 3c_1'' - s_1' p_1 + c_1(s_1^2 + c_1^2)/2$$

$$\varepsilon_2' = c_2' - (s_2 p_1 + s_1 p_2)/2 = 3\varepsilon_1''$$

$$\omega_2' = (s_1 \psi_2 - s_2 \psi_1)/2$$

$$2\psi_2' = P_0 \csc\varepsilon_0 [c_2 \cos 2\varepsilon_0 - c_1^2(\cot\varepsilon_0 + \sin 2\varepsilon_0)]$$

$$+ c_1 P_1 \csc\varepsilon_0 (\cos 2\varepsilon_0 - \sin^2\varepsilon_0) + p_0 \csc\varepsilon_0 (c_1^2 \csc\varepsilon_0 - c_2 \cos\varepsilon_0)$$

$$\chi_2' = (s_2' + c_1 p_2 + c_2 p_1)\csc\varepsilon_0 - c_1 \cot\varepsilon_0 \csc\varepsilon_0 (s_1' + c_1 p_1)$$

$$p_2' = \psi_2' + c_1 \chi_1' \sin\varepsilon_0 - \chi_2' \cos\varepsilon_0 + (s_2 c_1 + c_2 s_1)/2$$

$$\eta_2' = -(s_2 c_1 + c_2 s_1)/2$$

$$z_2' - \zeta_2' = [\chi_1(\psi_2' - \psi_2 \psi_1'/\psi_1) + \psi_1' \chi_2 - \psi_1 \chi_2']/3\psi_1$$

$$z_2' + \zeta_2' = \psi_1' \cos\varepsilon_0 - c_1 \psi_1' \sin\varepsilon_0 - \chi_2' = z_3 + \zeta_3$$

$$q_2' = (s_1 s_2' + s_1' s_2 + c_1 c_2' + c_1' c_2 - q_1' q_2)/q_1 = q_3$$

$$\theta_2' = \psi_2' \sin\varepsilon_0 - c_1 \psi_1' \cos\varepsilon_0 = \theta_3$$

附录2 IAU1980章动序列

j	周期（日）	k_{j1}	k_{j2}	k_{j3}	k_{j4}	k_{j5}	A_{0j} (0."0001)	A_{1j} (0."0001)	B_{0j} (0."0001)	B_{1j} (0."0001)
1	6798.4	0	0	0	0	1	-171996	-174.2	92025	8.9
2	182.6	0	0	2	-2	2	-13187	-1.6	5736	-3.1
3	13.7	0	0	2	0	2	-2274	-0.2	977	-0.5
4	3399.2	0	0	0	0	2	2062	0.2	-895	0.5
5	365.2	0	1	0	0	0	1426	-3.4	54	-0.1
6	27.6	1	0	0	0	0	712	0.1	-7	0.0
7	121.7	0	1	2	-2	2	-517	1.2	224	-0.6
8	13.6	0	0	2	0	1	-386	-0.4	200	0.0
9	9.1	1	0	2	0	2	-301	0.0	129	-0.1
10	365.3	0	-1	2	-2	2	217	-0.5	-95	0.3
11	31.8	1	0	0	-2	0	-158	0.0	-1	0.0
12	177.8	0	0	2	-2	1	129	0.1	70	0.0
13	27.1	-1	0	2	0	2	123	0.0	-53	0.0
14	27.7	1	0	0	0	1	63	0.1	-33	0.0
15	14.8	0	0	0	2	0	63	0.0	-2	0.0
16	9.6	-1	0	2	2	2	-59	0.0	26	0.0
17	27.4	-1	0	0	0	1	-58	-0.1	32	0.0
18	9.1	1	0	2	0	1	-51	0.0	27	0.0
19	205.9	2	0	0	-2	0	48	0.0	1	0.0
20	1305.5	-2	0	2	0	1	46	0.0	-24	0.0
21	7.1	0	0	2	2	2	-38	0.0	16	0.0
22	6.9	2	0	2	0	2	-31	0.0	13	0.0
23	13.8	2	0	0	0	0	29	0.0	-1	0.0
24	23.9	1	0	2	-2	2	29	0.0	-12	0.0
25	13.6	0	0	2	0	0	26	0.0	-1	0.0
26	173.3	0	0	2	-2	0	-22	0.0	0	0.0
27	27.0	-1	0	2	0	1	21	0.0	-10	0.0
28	182.6	0	2	0	0	0	17	-0.1	0	0.0

j	周　期 (日)	k_{j1}	k_{j2}	k_{j3}	k_{j4}	k_{j5}	A_{0j}	A_{1j}	B_{0j}	B_{1j}
							(0″.0001)		(0″.0001)	
29	91.3	0	2	2	-2	2	-16	0.1	7	0.0
30	32.0	-1	0	0	2	1	16	0.0	-8	0.0
31	386.0	0	1	0	0	1	-15	0.0	9	0.0
32	31.7	1	0	0	-2	1	-13	0.0	7	0.0
33	346.6	0	-1	0	0	1	-12	0.0	6	0.0
34	1095.2	2	0	-2	0	0	11	0.0	0	0.0
35	9.5	-1	0	2	2	1	-10	0.0	5	0.0
36	5.6	1	0	2	2	2	-8	0.0	8	0.0
37	14.2	0	-1	2	0	2	-7	0.0	3	0.0
38	7.1	0	0	2	2	1	-7	0.0	3	0.0
39	34.8	1	1	0	-2	0	-7	0.0	0	0.0
40	13.2	0	1	2	0	2	7	0.0	-3	0.0
41	199.8	-2	0	0	2	1	-6	0.0	3	0.0
42	14.8	0	0	0	2	1	-6	0.0	3	0.0
43	12.8	2	0	2	-2	2	6	0.0	-3	0.0
44	9.6	1	0	0	2	0	6	0.0	0	0.0
45	23.9	1	0	2	-2	1	6	0.0	-3	0.0
46	14.7	0	0	0	-2	1	-5	0.0	3	0.0
47	346.6	0	-1	2	-2	1	-5	0.0	3	0.0
48	6.9	2	0	2	0	1	-5	0.0	3	0.0
49	29.8	1	-1	0	0	0	5	0.0	0	0.0
50	411.8	1	0	0	-1	0	-4	0.0	0	0.0
51	29.5	0	0	0	1	0	-4	0.0	0	0.0
52	15.4	0	1	0	-2	0	-4	0.0	0	0.0
53	26.9	1	0	-2	0	0	4	0.0	0	0.0
54	212.3	2	0	0	-2	1	4	0.0	-2	0.0
55	119.6	0	1	2	-2	1	4	0.0	-2	0.0
56	25.6	1	1	0	0	0	-3	0.0	0	0.0
57	3232.9	1	-1	0	-1	0	-3	0.0	0	0.0

续表

j	周期（日）	k_{j1}	k_{j2}	k_{j3}	k_{j4}	k_{j5}	A_{0j} (0″.0001)	A_{1j}	B_{0j} (0″.0001)	B_{1j}
58	9.8	-1	-1	2	2	2	-3	0.0	1	0.0
59	7.2	0	-1	2	2	2	-3	0.0	1	0.0
60	9.4	1	-1	2	0	2	-3	0.0	1	0.0
61	5.5	3	0	2	0	2	-3	0.0	1	0.0
62	1615.7	-2	0	2	0	2	-3	0.0	1	0.0
63	9.1	1	0	2	0	0	3	0.0	0	0.0
64	5.8	-1	0	2	4	2	-2	0.0	1	0.0
65	27.8	1	0	0	0	2	-2	0.0	1	0.0
66	32.6	-1	0	2	-2	1	-2	0.0	1	0.0
67	6786.3	0	-2	2	-2	1	-2	0.0	1	0.0
68	13.7	-2	0	0	0	1	-2	0.0	1	0.0
69	13.8	2	0	0	0	1	2	0.0	-1	0.0
70	9.2	3	0	0	0	0	2	0.0	0	0.0
71	8.9	1	1	2	0	2	2	0.0	-1	0.0
72	9.3	0	0	2	1	2	2	0.0	-1	0.0
73	9.6	1	0	0	2	1	-1	0.0	0	0.0
74	5.6	1	0	2	2	1	-1	0.0	1	0.0
75	34.7	1	1	0	-2	1	-1	0.0	0	0.0
76	14.2	0	1	0	2	0	-1	0.0	0	0.0
77	117.5	0	1	2	-2	0	-1	0.0	0	0.0
78	329.8	0	1	-2	2	0	-1	0.0	0	0.0
79	32.8	1	0	-2	2	0	-1	0.0	0	0.0
80	9.5	1	0	-2	-2	0	-1	0.0	0	0.0
81	32.8	1	0	2	-2	0	-1	0.0	0	0.0
82	10.1	1	0	0	-4	0	-1	0.0	0	0.0
83	15.9	2	0	0	-4	0	-1	0.0	0	0.0
84	4.8	0	0	2	4	2	-1	0.0	0	0.0
85	25.4	0	0	2	-1	2	-1	0.0	0	0.0
86	7.3	-2	0	2	4	2	-1	0.0	1	0.0

j	周期 (日)	k_{j1}	k_{j2}	k_{j3}	k_{j4}	k_{j5}	A_{0j}	A_{1j}	B_{0j}	B_{1j}
							(0".0001)		(0".0001)	
87	4.7	2	0	2	2	2	-1	0.0	0	0.0
88	14.2	0	-1	2	0	1	-1	0.0	0	0.0
89	13.6	0	0	-2	0	1	-1	0.0	0	0.0
90	12.7	0	0	4	-2	2	1	0.0	0	0.0
91	409.2	0	1	0	0	2	1	0.0	0	0.0
92	22.5	1	1	2	-2	2	1	0.0	-1	0.0
93	8.7	3	0	2	-2	2	1	0.0	0	0.0
94	14.6	-2	0	2	2	2	1	0.0	-1	0.0
95	27.3	-1	0	0	0	2	1	0.0	-1	0.0
96	169.0	0	0	-2	2	1	1	0.0	0	0.0
97	13.1	0	1	2	0	1	1	0.0	0	0.0
98	9.1	-1	0	4	0	2	1	0.0	0	0.0
99	131.7	2	1	0	-2	0	1	0.0	0	0.0
100	7.1	2	0	0	2	0	1	0.0	0	0.0
101	12.8	2	0	2	-2	1	1	0.0	-1	0.0
102	943.2	2	0	-2	0	1	1	0.0	0	0.0
103	29.3	1	-1	0	-2	0	1	0.0	0	0.0
104	388.3	-1	0	0	1	1	1	0.0	0	0.0
105	35.0	-1	-1	0	2	1	1	0.0	0	0.0
106	27.3	0	1	0	1	0	1	0.0	0	0.0

附录3 IAU1976天文常数系统和IERS天文常数值（1992）

IAU 1976 天文常数系统	IERS（1992） 天文常数值
定义常数	
（1）高斯引力常数 $k = 0.01720209895$	（1）高斯引力常数 $k = 0.01720209895$ （2）光速 $c = 299792458$ 米/秒
基础常数	
（2）光　速 $c = 299792458$ 米/秒	
（3）天文单位距离的光行时 $\tau_A = 499^s.004782$	（3）天文单位距离的光行时 $\tau_A = 499^s.00478353$
（4）地球赤道半径 $a_e = 6378140$ 米	（4）地球赤道半径 $a_e = 6378136.3$ 米
（5）地球力学形状因子 $J_2 = 0.00108263$	（5）地球力学形状因子 $J_2 = 0.0010826362$
（6）地心引力常数 $GE = 3.986005 \times 10^{14}$ 米^3/秒^2	（6）地心引力常数 $GE = 3.98600441 \times 10^{14}$ 米^3/秒^2
（7）引力常数 $G = 6.672 \times 10^{-11}$ 米^3/千克·秒^2	（7）引力常数 $G = 6.67259 \times 10^{-11}$ 米^3/千克·秒^2
（8）月地质量比 $\mu = 0.01230002$	（8）月地质量比 $\mu = 0.012300034$
（9）黄经总岁差（J2000.0） $p = 5029''.0966$（每儒略世纪）	（9）黄经总岁差（J2000.0） $p = 5029''.0966$（每儒略世纪）
（10）黄赤交角（J2000.0） $\varepsilon = 23°26'21''.448$	（10）黄赤交角（J2000.0） $\varepsilon = 23°26'21''.4119$ （11）地球的平均角速度

续表

基　础　常　数	
	$\omega=7.292115\times10^{-5}$弧度/秒
	(12)地球的惯性矩
	$A=8.0094\times10^{37}$千克·米^2
	$B=8.0096\times10^{37}$千克·米^2
	$C=8.0358\times10^{37}$千克·米^2
导　出　常　数	
(11)章动常数(J2000.0)	
$N=9''.2025$	
(12)天文单位距离	(13)天文单位距离
$c\tau_A=A=1.49597870\times10^{11}$米	$c\tau_A=A=1.4959787066\times10^{11}$米
(13)太阳视差	(14)太阳视差
$\pi_\odot=\sin^{-1}(a_e/A)=8''.794148$	$\pi_\odot=\sin^{-1}(a_e/A)=8''.794142$
(14)光行差常数(J2000.0)	
$K=20''.49552$	
(15)地球扁率	(15)地球扁率
$f=1/298.257$	$f=1/298.257$
(16)日心引力常数	(16)日心引力常数
$GS=1.32712438\times10^{20}$米^3/秒^2	$GS=1.32712440\times10^{20}$米^3/秒^2
(17)日地质量比	(17)日地质量比
$GS/GE=S/E=332946.0$	$GS/GE=S/E=332946.045$
(18)日与地月系质量比	(18)日与地月系质量比
$S/E(1+\mu)=328900.5$	$S/E(1+\mu)=328900.56$
(19)太阳质量	(19)太阳质量
$GS/G=S=1.9891\times10^{30}$千克	$GS/G=S=1.9891\times10^{30}$千克
行　星　质　量　系　统(倒数)	
水　星	水　星
6023600	6023600
金　星	金　星
408523.5	408523.71

行星质量系统（倒数）	
地月系	地月系
328900.5	328900.55
火星	火星
3098710	3098708
木星	木星
1047.355	1047.3486
土星	土星
3498.5	3497.898
天王星	天王星
22869	22902.94
海王星	海王星
19314	19412.240
冥王星	冥王星
3000000	135000000

附录 4　地心处TDB-TT的解析表达式

在地心处有

$$TDB-TT=P=\sum_{i=1}^{131}A_i\sin(n_iT+a_i)$$

其中T是从J2000.0起算的时间，以儒略世纪为单位，振幅A_i、频率n_i和位相a_i的值列于下表。

i	A (μs)	周期 (年)	n (度/儒略世纪)	a (度)
1	1656.675	1.00	35999.3729	357.5267
2	22.418	1.09	32964.467	246.199
3	13.840	0.50	71998.746	355.057
4	4.770	11.86	3034.906	25.463
5	4.677	1.04	34777.259	230.394
6	2.257	29.46	1222.114	317.596
7	1.686	1783.39	-20.186	288.336
8	1.555	0.08	445267.114	297.852
9	1.277	0.80	45036.886	343.134
10	1.193	1.20	29929.562	209.120
11	1.115	1.60	22518.443	81.522
12	0.794	0.55	65928.934	133.059
13	0.600	3.98	9037.513	153.454
14	0.495	1.01	35570.906	326.400
15	0.486	1.07	33718.147	29.799
16	0.468	1.01	35780.887	336.120
17	0.447	238.92	150.678	207.154
18	0.435	15.78	-2281.226	249.192
19	0.431	84.02	428.467	139.409
20	0.376	1.14	31555.956	235.178
21	0.243	8.10	-4443.417	209.235
22	0.238	93462.09	0.385	184.592
23	0.231	1.07	33555.145	273.520

i	A (μs)	周期 (年)	n (度/儒略世纪)	a (度)
24	0.204	0.52	68963.840	248.320
25	0.173	0.33	107998.119	352.582
26	0.159	0.57	62894.029	108.292
27	0.144	7.89	-4562.452	341.339
28	0.138	0.53	67555.328	65.088
29	0.120	164.77	218.486	260.774
30	0.119	1.15	31436.921	109.694
31	0.117	5.93	6069.811	49.293
32	0.102	1.13	-31931.980	342.653
33	0.098	2.47	14577.848	5.313
34	0.080	1.34	26894.656	168.981
35	0.075	2.14	16859.074	285.259
36	0.073	30.47	1181.356	117.936
37	0.064	1.09	32923.710	73.118
38	0.064	1.09	33005.225	238.953
39	0.064	302.43	119.034	151.564
40	0.059	14.73	2444.228	276.287
41	0.054	0.36	98893.402	195.435
42	0.048	40.43	890.493	128.688
43	0.048	2.93	12296.622	85.653
44	0.043	9.93	3625.584	327.812
45	0.043	0.04	922466.208	73.050
46	0.042	1.00	35958.615	164.408
47	0.041	0.51	70776.632	228.271
48	0.040	0.40	90073.771	145.943
49	0.038	883.27	-40.758	204.706
50	0.037	1.99	18075.026	290.613
51	0.037	1.23	29155.695	190.488
52	0.037	7.84	4594.096	358.061

i	A (μs)	周期 (年)	n (度/儒略世纪)	α (度)
53	0.035	12.02	2994.148	298.526
54	0.034	0.67	54074.398	137.128
55	0.033	1.04	34736.501	237.488
56	0.032	0.71	50577.221	317.520
57	0.032	1.03	34818.017	42.925
58	0.030	0.89	40593.468	194.765
59	0.030	0.52	69554.518	101.411
60	0.028	1.00	-36019.559	290.796
61	0.027	1.00	35979.187	289.190
62	0.026	0.09	-409267.741	239.677
63	0.025	3.59	10015.396	169.941
64	0.025	5.26	-6843.677	57.161
65	0.023	1.02	35142.439	188.514
66	0.023	0.60	59859.123	83.712
67	0.022	0.44	81036.259	341.057
68	0.021	0.75	48295.995	37.356
69	0.020	14.98	2403.470	214.725
70	0.018	0.92	39034.279	182.373
71	0.017	85.72	419.962	199.413
72	0.016	0.62	58517.816	76.248
73	0.016	28.51	-1262.871	229.754
74	0.016	2.67	-13480.930	352.100
75	0.015	25.56	-1408.512	347.302
76	0.015	0.32	112592.214	227.479
77	0.015	4.65	7734.170	246.816
78	0.014	0.38	95858.496	172.214
79	0.014	0.35	101928.307	120.569
80	0.014	11.70	-3075.663	341.284
81	0.013	60.95	530.678	96.867

i	A (μs)	周 期 (年)	n (度/儒略世纪)	a (度)
82	0.012	1.34	26874.470	272.543
83	0.012	1.11	32333.031	315.989
84	0.012	0.78	46014.769	117.689
85	0.012	1.34	-26961.860	151.782
86	0.012	1750.00	20.571	93.138
87	0.011	1.23	29338.883	277.817
88	0.011	11.35	3171.719	46.688
89	0.011	6.60	5452.944	327.713
90	0.010	1.07	33595.903	10 .68
91	0.010	22.13	1626.394	11 .599
92	0.010	1.00	36150.051	60.887
93	0.010	42.01	856.934	279.088
94	0.009	0.04	858602.249	38.356
95	0.009	1597.90	22.530	170.403
96	0.009	1.88	19140.299	209.776
97	0.009	46.52	-773.366	189.406
98	0.008	0.53	67436.294	70.465
99	0.008	0.47	76592.841	217.627
100	0.008	171.44	209.981	9.706
101	0.008	19.86	1812.792	139.831
102	0.008	0.52	69717.520	30.169
103	0.008	1.20	29970.319	283.600
104	0.008	165.23	217.883	303.705
105	0.007	1.00	-35848.695	209.569
106	0.007	1.01	35562.400	50.050
107	0.007	25.89	-1390.733	210.586
108	0.007	0.94	38280.599	343.709
109	0.007	0.82	43733.543	196.849
110	0.006	1.20	29888.804	41.521

i	A (μs)	周　期 (年)	n (度/儒略世纪)	a (度)
111	0.006	0.27	135110.657	309.021
112	0.006	1.51	23859.750	126.596
113	0.006	1.11	32373.789	317.805
114	0.006	0.53	68332.404	143.177
115	0.006	3.95	−9124.903	144.523
116	0.006	6.58	5475.183	233.394
117	0.006	0.27	131857.869	261.587
118	0.006	1.05	34186.581	128.476
119	0.005	1137.66	31.644	145.367
120	0.005	1.46	24593.244	154.526
121	0.005	0.55	65155.068	147.741
122	0.005	0.98	36889.866	80.370
123	10.216T	1.00	35999.373	243.451
124	0.171T	0.50	71998.746	240.980
125	0.027T	29.46	1222.114	194.661
126	0.027T	11.86	3034.906	366.061
127	0.026T	1783.29	−20.186	9.382
128	0.007T	1.20	29929.562	264.911
129	0.006T	238.92	150.678	59.775
130	0.005T	3.98	9037.513	256.025
131	0.043T^2	1.00	35999.373	151.121

主 要 参 考 书 目

〔1〕C.H.勃拉日哥著，易照华等译，球面天文学教程。高等教育出版社，1954。

〔2〕H.艾科恩著，任江平等译，恒星方位天文学。测绘出版社，1981。

〔3〕苗永宽编著，球面天文学。科学出版社，1983。

〔4〕E.W.伍拉德，G.M.克莱门斯著，全和钧等译，球面天文学。测绘出版社，1984。

〔5〕紫金山天文台编，中国天文年历。科学出版社，1984。

〔6〕*Astronomical Almanac*, *Washington*: *US Government Printing Office*, *and London*: *Her Majesty's Stationery Office*, 1984.

〔7〕R.M.Green, *Spherical Astronomy*. *Cambridge University Press*, 1985.

〔8〕容建湘编著，恒星天文学。高等教育出版社，1986。

〔9〕张承志，夏一飞编著，天体测量学。高等教育出版社，1986。

〔10〕L.G.塔夫著，凌兆芬等译，计算球面天文学。科学出版社，1992。

《大地天文学》 [illegible]

《天文学导论》

《实测天文学：[illegible]》

[illegible]

作业 20%

考试 60%

课堂问答. 20%

英文缩写词

AT	原子时
AU	天文单位
BIH	国际时间局
BIPM	国际计量局
BTS	*BIH*的地球参考系
CCDS	秒定义咨询委员会
CCIR	国际无线电咨询委员会
CEP	天球历书极
CIO	国际习用原点
CIRS	协议的惯性参考系
CTRS	协议的地球参考系
ET	历书时
GPS	全球定位系统
GRS	地心参考系
IAG	国际大地测量协会
IAU	国际天文学联合会
IERS	国际地球自转服务
ILE	改良月历表
ILS	国际纬度服务
IPMS	国际极移服务
IUGG	国际大地测量和地球物理联合会
JD	儒略日
JPL	美国喷气推进实验室
LAGEOS	激光地球动力学卫星
LLR	激光测月
LSR	本地静止标准
MERIT	地球自转的监测及观测和分析技术的比较
MJD	约简儒略日
SI	国际单位制
SLR	激光测卫
TAI	国际原子时
TCB	质心坐　时
TCG	地心坐标时
TDB	质心力学时
TDT	地球力学时

TT	地球时
UT	世界时
UTC	协调世界时
VLBI	甚长基线干涉测量

名词索引

三 画

四 画

五 画

六 画

七　画

八　画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画

十五画

十六画

十七画




扫描全能王
3亿人都在用的扫描App